STRUCTURES, FONCTIONNEMENT, ECOLOGIE DES ORGANISATIONS DIDACTIQUES A PROPOS DE L'ALGEBRE EN QUATRIEME

Alain Bronner, Annie Noirfalise

ALAIN BRONNER ET ANNIE NOIRFALISE

STRUCTURES, FONCTIONNEMENT, ECOLOGIE DES ORGANISATIONS DIDACTIQUES

A PROPOS DE L'ALGEBRE EN QUATRIEME

Abstract. The aim of this workshop was to provide an introduction to the evaluation of didactical organisations, by analysing a teacher trainer's record of an algebra class given by a student teacher. The study of the mathematical and didactical organisations involved led to the analysis of various levels of didactical determination.

Dorier, J.-L. , Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*
VERSION ELECTRONIQUE DU CEDEROM D'ACCOMPAGNEMENT

1. INTRODUCTION

Le travail présenté ici peut se scinder en deux parties. Dans un premier temps, nous avons conduit un travail d'analyse puis d'évaluation utilisant le cadre théorique présenté dans le cours relatif à ce thème à propos de l'observation[3] d'une séance consacrée à l'étude de *« problèmes conduisant à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue »* dans une classe de 4e. Il s'agissait dans un premier temps de préciser le contenu de la séance observée et l'organisation mathématique en jeu puis de déterminer la structure de la séance selon les moments didactiques et de préciser les techniques de réalisation des différents moments didactiques identifiés.

Dans un second temps, l'étude des *topos* des élèves et du professeur, de la réalisation des moments, l'analyse de leurs niveaux de détermination, ont permis d'aller plus avant dans l'évaluation et de s'engager dans un travail de développement en utilisant, comme support à la réflexion, des exemples d'organisations didactiques sur le même thème.

2. CONTENU DE LA SÉANCE ET ORGANISATION MATHÉMATIQUE EN JEU

Le corpus de référence (annexe D1) est constitué de la première séance sur les équations dans une classe de 4e. L'organisation mathématique visée relève du *domaine* des « travaux numériques », du *secteur* du « calcul littéral », et plus précisément du *thème* constitué autour du type de tâches T : « résoudre un problème conduisant à des équations du premier degré à une inconnue ». Il s'agit là d'une organisation mathématique locale, intégrant des acquis des années antérieures que nous évoquerons ci-dessous, sur laquelle d'autres parties du programme s'appuieront ainsi que le programme de 4e le précise dans la colonne des commentaires.

Ces commentaires du programme de la classe de quatrième comporte également le découpage du type de tâches T en trois sous-types de tâches : T_m : « mettre en équation le problème », T_r : « résoudre l'équation » et T_i « interpréter le résultat ».

[3] Le lecteur trouvera cette observation sur le cédérom en annexe D1. Elle est constituée d'éléments transcrits par le formateur, repérés par des numéros de lignes dans ce texte, et de pages extraites du cahier d'un élève, repérées par A_i dans ce texte.

Nous situerons d'abord rapidement ces trois types de tâches et leur place dans la séance observée avant de préciser l'organisation mathématique étudiée.

2.1. À propos du type de tâches « mettre un problème en équation »

Bien qu'explicitement au programme de la classe de 4e, ce type de tâches n'est pas, dans un premier temps, au centre du travail de la séance observée. Il apparaît essentiellement comme un élément de l'organisation didactique au service des tâches du type T_r, l'étude de « la résolution d'un problème » sera traitée dans des séances ultérieures.

On notera à cet égard que l'association « *résolution de problèmes* » et « *mise en équation* » n'apparaît explicitement, dans les programmes, qu'à partir de la classe de 4e. En classe de 6e comme en classe de 5e, si « *la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme* » (c'est-à-dire la partie travaux numériques), ces problèmes sont surtout l'occasion d'activités numériques. Les contenus en liaison avec la résolution d'équations portent, dans ces deux classes, sur « l'initiation à la résolution d'équations » à l'appui des activités numériques et, en 5e, de l'introduction du calcul littéral. Dans le programme de ces classes, la mise en équation semble aller de soi et aucune technique spécifique n'est indiquée.

2.2. *À propos du type de tâches « résoudre une équation »*

La résolution d'une équation d'inconnue x consiste à trouver toutes les valeurs numériques qui, substituées à x, donnent aux deux membres de l'équation la même valeur numérique. C'est ainsi que, dans les textes officiels, la rencontre avec les équations est associée en classe de 6e avec « *la recherche d'un nombre manquant dans une opération* » disjointe à ce niveau de l'initiation aux écritures littérales. En classe de 5e, l'initiation à la résolution d'équations est associée au travail sur le calcul littéral. Dans cette classe, le problème du statut du signe « = » est abordé : on peut relever dans les compétences exigibles *«Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données* » et dans les commentaires correspondants : « *La classe de 5e correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner ».*

À ce niveau donc, l'égalité de deux expressions littérales est vraie ou fausse suivant la valeur numérique donnée aux variables qui interviennent. On ne peut donc parler que d'expressions qui sont égales pour telles valeurs des inconnues, la technique associée consistant à effectuer les calculs numériques indiqués. L'égalité au sens de l'identité de deux polynômes ne sera véritablement travaillée que dans les classes ultérieures avec les identités remarquables en 3e et les égalités fonctionnelles en 2de.

Les compétences exigibles relativement au thème étudié sont vagues : aucune technique de résolution n'est mentionnée dans les programmes. C'est dans le document d'accompagnement du cycle central (5e-4e), dans le paragraphe « *Calcul littéral* », que l'on trouve des éléments relatifs aux techniques de résolution d'équations (et aux technologies associées), qui constituent le contenu mathématique principal étudié dans la séance observée.

> En classe de 5e, la substitution de nombres à des lettres permet, comme en classe de 6e, d'exécuter des calculs numériques, de comprendre et de maîtriser les règles d'écriture d'expressions littérales. Cette substitution, accompagnée de la constitution de tableaux de nombres et de la construction de points dans un plan muni d'un repère, prépare à la notion de fonction.
>
> Dans cette classe, si on poursuit le travail d'initiation par référence au sens des opérations (recherche d'un nombre inconnu dans une opération), on approche également la notion d'équations ou d'inéquations par la pratique de tests. À ce niveau, tester la véracité d'une égalité

> ou d'une inégalité littérales pour des valeurs numériques permet de donner au signe d'égalité une signification différente de celle qu'il a dans l'exécution de calculs (commande EXE de certaines calculatrices). Le travail ainsi engagé prépare l'étude, en classe de 4[e], de la conservation des égalités et des inégalités, ainsi que celle de la résolution d'équations. »

Dans la séance observée, ce type de tâche T_r, qui constitue le *sujet* de l'organisation étudiée, occupe la place centrale. Comme nous le verrons, plusieurs techniques sont mises en œuvre pour la réalisation des tâches de type T_r dans le corpus étudié.

2.3. *À propos du type de tâches* « *interpréter le résultat* »

L'interprétation du résultat consiste à accepter ou rejeter les solutions de l'équation suivant les conditions imposées par le problème et à les reformuler dans le contexte du problème. Bien qu'explicitement au programme de la classe de 4[e], ce type de tâches n'est pas présent dans la séance examinée[4].

2.4. *L'organisation mathématique étudiée*

Au cours de cette séance, nous l'avons dit, seules les tâches de type T_r « résoudre une équation du premier degré à une inconnue » seront véritablement étudiées même si le type de tâches T_m est rencontré.

Trois techniques seront mises en œuvre relativement au type de tâches T_r. On voit d'abord apparaître une technique provisoire τ_1, qui consiste à « remonter les calculs » comme en témoigne l'extrait suivant de la séance observée relatif à l'équation $[(x+3) \times 5] - 7 = 48$:

> (P) Maintenant, on va faire pareil pour *x*. Kar ?
> (Kar) [(48+7) : 5] – 3.
> (P) Ça fait combien ça ?
> (Kar) 8.
> (P) Ça signifie quoi, que *x* est égal à 8 ?
> (élève) Que l'inconnue est égale à 8.

Cette technique sera rapidement disqualifiée et ne fera pas partie de l'organisation mathématique construite.

Une deuxième technique, τ_2, est produite : la voici mise en œuvre sur l'exemple précédent (voir annexe D1, lignes 83 à 94). « On développe » d'abord le premier membre : il vient $5x + 15 - 7 = 48$, puis $5x + 8 = 48$; on fait ensuite « disparaître le 8 » en « enlevant 8 de chaque côté » : il vient $5x + 8 - 8 = 48 - 8$ puis $5x = 40$. Ce qui donne $x = 8$.

On notera que la technique τ_2 est muette sur la manière d'obtenir $x = 8$ à partir de $5x = 40$: de fait, la suite de la séance travaillera un sous-type de tâches de T_r, les équations résolues étant de la forme $x + b = c$ ou $ax + b = (a\pm1)x$.

Une troisième technique, τ_3, qui modifie la technique τ_2 voit le jour en fin de séance : au lieu « d'enlever de chaque côté » on « change le terme de membre en le changeant de signe » (annexe D1, lignes 99 à 112).

On ne peut pas déterminer, compte tenu de l'observation réalisée, si les deux techniques τ_2 et τ_3 figureront dans l'organisation mathématique ou si seule τ_3 sera conservée.

Les éléments technologiques suivants émergent au cours de la séance : la définition d'une équation du premier degré à une inconnue, les définitions de « premier membre » et de « second membre », la définition de « solution de l'équation » ainsi que celle de « résolution de

[4] Il pourrait en être autrement. Voir par exemple M. Monge et M. Guinchan *Arithmétique, Algèbre, Géométrie – Classe de 3[e]*. Quatrième édition. Paris : Eugène Belin, 1947. pp. 42-44. Ou H. Schaeffer et J. Lebaile. *Mathématiques classe de 3[e]*. Paris : Delagrave, 1958. pp. 124-125.

l'équation » ; les règles de « conservation des égalités » par addition ou soustraction d'un même nombre et par multiplication ou division par un même nombre.

Les règles « *de la conservation des égalités* » sont justifiées par le recours à un dispositif matériel supposé familier aux élèves : l'équilibre d'une balance de type Roberval. Il s'agit d'un dispositif que l'on peut modéliser à l'aide du calcul algébrique et on s'appuie sur le fait que tout résultat vrai dans ce système le sera dans le modèle. Aucune démonstration, pourtant possible dans le cadre des programmes comme nous le verrons plus loin, n'est envisagée dans l'organisation étudiée ; celle-ci aurait nécessité de définir ce que signifie l'expression « *conservation des égalités* », ce qui n'est pas fait. On notera que d'autres organisations didactiques se réfèrent à d'autres dispositifs comme des graphiques représentant des longueurs[5].

3. STRUCTURE DE LA SÉANCE : LES MOMENTS DIDACTIQUES ET LEUR RÉALISATION

Il s'agit d'une séance de structure apparemment ternaire, qui débute avec une activité d'étude et de recherche, AER, se poursuit par une phase collective d'élaboration et d'institutionnalisation de connaissances et se termine par une phase d'exercices dont certains sont traités en classe et les autres donnés en travail hors classe. Nous verrons lors de l'analyse en termes de moments que cette structure est beaucoup plus complexe, les phases que l'on peut découper chronologiquement dans le déroulement de la séance ayant des fonctions diverses.

3.1. *Moment de* première rencontre *(annexe D1, lignes 3 à 19)*

La séance étudiée débute par l'activité suivante, dont la fonction semble être une première rencontre avec les types de tâches T_m et T_r.

> Arthur dit à Claire : « Pense à un nombre ; ajoute lui 3 ; multiplie ce que tu obtiens par 5 ; enlève 7 à ce que tu obtiens. Dis-moi combien tu trouves et je te dirais le nombre que tu avais choisi. »
> Claire a obtenu 48.
> Comment Arthur va-t-il faire pour trouver le nombre en question ?
> 1. Claire a-t-elle pensé au nombre 7 ?
> 2. On imagine que l'on a trouvé la solution et que l'on fait la vérification. Pour cela on représente le nombre cherché par une lettre : x. Que peut-on écrire ?

Cette activité se présente sous forme d'un jeu numérique, ce qui peut faciliter la dévolution du problème. Il est à noter toutefois que les élèves n'ont pas, en fait, à résoudre le problème posé en italique, mais à répondre aux questions qui suivent (voir annexe D1, ligne 6).

La première question, de nature numérique, doit être familière aux élèves et non problématique. La seconde question impose une technique de mise en équation pour résoudre le problème en italique, supprimant ainsi le caractère problématique de l'activité. On peut faire l'hypothèse que certains élèves l'ont résolu autrement (annexe D1, ligne 14), mais cela ne peut être repéré dans le corpus.

Après un temps de travail individuel, très bref, les deux questions sont corrigées et aboutissent à la mise en évidence de l'équation « $[(x + 3) \times 5] - 7 = 48$ ». La tâche est coopérative et dirigée complètement par P. Les élèves copient, sous le texte distribué, dans leur cahier d'exercices, ce que P écrit au tableau (annexe D1, pages A_9 et A_{10}).

[5] Voir par exemple H. Schaeffer et J. Lebaile. *Mathématiques classe de 5*^{e}. Paris : Delagrave, 1954. pp. 127-161.

3.2. *Moment technologico-théorique et moment exploratoire (annexe D1, lignes 20 à 51)*

À l'aide d'un questionnement de type maïeutique, P fait émerger la technique τ_1 (remontée des calculs) pour résoudre l'équation trouvée et des éléments technologiques relatifs aux tâches de type T_r : équation, inconnue, résolution d'une équation, solution d'une équation. Puis P remet en cause la technique de résolution τ_1 qu'il a suggérée et utilisée ici.

3.3. *Moment d'institutionnalisation d'une partie de l'environnement technologique (annexe D1, lignes 52 à 77)*

Des éléments technologiques ayant émergés précédemment – équation, inconnue, résolution d'équation – auxquels s'ajoutent les définitions du membre de droite et du membre de gauche sont institutionnalisés à partir d'un exemple d'équation. P dicte tout ceci tout en l'écrivant au tableau pendant que les élèves copient sur leur cahier de cours (annexe D1, pages A_1 et A_2). Un exemple de vérification que deux nombres sont ou ne sont pas solutions d'une équation est traité sous forme d'un dialogue fortement guidé avec la classe.

3.4. *Moment d'émergence de la technique t_2 et moment technologico-théorique (lignes 78 à 94)*

L'activité de départ, ou plutôt l'équation qu'elle a permis de produire, est reprise pour rejeter la technique τ_1 avec l'argument « *le fait de remonter les calculs c'est pas très pratique* » et pour faire émerger une nouvelle technique, τ_2 . Comme précédemment, P utilise alors un questionnement directif. Au cours des échanges, quelques fragments de la technique sont mis en évidence : « *on développe* », « *on enlève le 8 de chaque côté* » «*j'écris l'étape intermédiaire… 5x + 8 – 8 = 48 – 8* ».

Le problème de la justification de cette partie de la technique « *Pourquoi on a le droit* » est posé par un élève et le compte rendu mentionne que « P y répond en évoquant et en mimant très rapidement le principe d'une balance », avant de dicter la règle θ_1 de conservation des égalités par addition ou soustraction d'un même nombre que les élèves notent sur le cahier d'activités (annexe D1, page A_{10}). Cet épisode participe également de l'institutionnalisation de l'élément θ_1.

3.5. *Moment de travail de la technique t_2, d'émergence de la technique t_3, moment technologico-théorique (lignes 95 à 107 ; 111 à 114)*

Deux spécimens d'équations sont traités, $x + 12 = 36$ et $5x = 4x – 2$, à partir des propositions des élèves qui utilisent la technique τ_2 précédente. P, par des interventions très guidées : « *Est-ce que vous voyez une règle … Mais moi je veux une règle de calcul qui commence à apparaître…* », fait émerger un nouvel élément technologique : « *quand un nombre…non, un terme…change de membre dans une équation…Alors ? …Il change de signe.* ». Une nouvelle règle θ_2, la règle de transposition, est énoncée et notée sur le cahier d'activité (annexe D1, pages A_{10} et A_{11}). Cet épisode participe ainsi à l'institutionnalisation. Notons que le moment d'institutionnalisation sera repris à la séance suivante, les deux règles θ_1 et θ_2 étant notées dans le cahier de cours (annexe D1, pages A_2 et A_3). L'élément technologique θ_2 permet alors de modifier la technique τ_2 pour produire la technique τ_3 par l'intermédiaire de la résolution de l'équation $1{,}1 + u = 3{,}2$. À cette occasion, un nouvel élément technologique apparaît fugacement à travers la remarque suivante « *Vous voyez que n'importe quelle lettre fait l'affaire* » : le statut des lettres utilisées.

3.6. Moment de travail de l'organisation mathématique (lignes 107 à 110 ; 115)

P avait prévu de traiter également l'équation $y - 3 = 4y$, ce qui aurait participé du moment de travail de l'organisation mathématique mais, faute de temps, ce dernier exemple sera donné en travail hors classe accompagné de quatre autres spécimens : $x + 9 = 36$, $5z + 6 = 4z$, $6 + 5x = 6x + 2$ et $3{,}6 - x = 9{,}6$.

3. ÉLÉMENTS D'ÉVALUATION ET DE DÉVELOPPEMENT

Nous revenons dans cette partie sur certains éléments de l'analyse précédente pour préciser quelques contraintes qui pèsent sur la réalisation observée et pour envisager, dans certains cas, d'autres manières de réaliser les fonctions didactiques analysées. Dans cette perspective, nous serons amenés à nous référer, entre autres, à deux observations de classes de 4e sur le même sujet que le lecteur trouvera dans les annexes D2 (professeur Pc) et D3 (professeur Pg).

4.1. *Effet du « repliement temporel »*

Dans son troisième cours, Yves Chevallard rappelle certaines incidences du « *repliement temporel* » dû au morcellement de l'enseignement en séquences de 55 minutes imposées à toutes les disciplines ; cette contrainte, de niveau 0, nous semble peser un poids important dans les choix d'organisation didactique faits par P.

Tout d'abord, la durée très courte d'une séance fait que la leçon, conçue ici comme une unité atomique, ne traitera que le sujet, soit la résolution d'équations du premier degré à une inconnue, sans que le thème dans lequel il s'insère, la résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré, soit réellement pris en compte. Néanmoins l'organisation aurait pu être pensée en sorte que l'étude du thème permette d'articuler, sur une période longue, le travail sur les trois types de tâches T_m, T_r et T_i. On peut voir une tentative allant dans ce sens avec la situation numérique « Arthur et Claire », mais cela reste très limité. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment l'activité de départ aurait pu être modifiée pour permettre une première rencontre avec le thème, ce qui aurait nécessité plus de temps.

Dans l'organisation didactique proposée par le professeur Pc (annexe D2), la séance est également centrée exclusivement sur la résolution d'équations, mais le traitement du thème a été engagé dans une séance précédente consacrée aux « *Équations et problèmes* » comme en témoigne le titre de l'ensemble des traces écrites de la première séance situées dans le cahier d'AER/exercices. L'activité d'étude et de recherche qui a alors servi pour une première rencontre, l'émergence d'une technique et un début de construction technologico-théorique relativement au type de tâches de mise en équation est rappelée au début de la séance observée. Cette activité permet de poursuivre une « *aventure intellectuelle* » débutée avant et qui se poursuivra au-delà de cette séance. En particulier le travail de techniques de mise en équation sera mené de pair avec le travail de techniques de résolution d'équations durant les séances suivantes.

Semblablement, la séance réalisée par le professeur Pg (annexe D3) manifeste une organisation où le traitement du thème est clairement pris en compte et se poursuivra sur plusieurs semaines. Ce professeur cherche, non sans quelques difficultés d'ailleurs, à motiver l'étude des différents types de tâches dont il sera question ainsi que la disqualification de techniques déjà connues en raison de leur domaine de validité trop limité, ce qui nécessite une organisation didactique permettant de rendre visible la cohérence du contenu traité au-delà du morcellement horaire.

En second lieu, nous avons indiqué à plusieurs reprises que P est très présent dans la gestion de la classe. On peut noter à cet égard que le temps de travail individuel des élèves est de courte durée ; que leurs interventions au tableau sont rares et réservées, lorsqu'elles existent, à des corrections d'exercices ; que leurs interventions orales ne sont prises en compte que lorsqu'elles vont dans le sens souhaité par P. Du point de vue du professeur, le temps didactique doit avancer en raison de la contrainte de temporelle indiquée mais aussi, peut-être, de la crainte du débordement dans des classes de réputation assez difficile (niveau 0, pédagogique). En définitive le *topos* de l'élève est réduit à la résolution d'exercices dont la technique a été donnée au préalable.

4.2. *À propos de l'activité d'étude et de recherche*

Le choix de débuter l'étude par une activité est conforme à une contrainte relevant du niveau 1 (niveau de la discipline). On trouve en effet de nombreuses incitations dans les programmes de mathématiques de collège à pratiquer de la sorte. Citons-en quelques-unes.

> À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat ; expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié. » (Finalités et objectifs de la classe de 6e)
>
> « [E]lles [les études expérimentales] ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves(…). On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes. (…) Les activités de formation, distinctes des travaux d'évaluation portant sur les compétences exigibles, seront aussi riches et diversifiées que possible. » (Présentation des programmes du cycle central).

Les notations précédentes sont reprises dans la présentation des programmes de la classe de troisième, ainsi que dans le document d'accompagnement des programmes de la classe de seconde[6].

Dans le domaine « *Travaux numériques* », en regard du contenu « *Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue* », le programme de 4e précise que « *les problèmes issus d'autres parties du programme conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution* ». Le choix d'un problème numérique comme activité d'étude et de recherche, dans le corpus P comme dans les corpus Pc et Pg, paraît alors conforme aux indications du programme si l'on entend que le traitement de ce thème doit conduire à l'étude de techniques utiles dans d'autres domaines (niveau 2).

On a dit plus haut que l'activité choisie par P a pour fonction de participer à la première rencontre avec le type de tâches étudié, résoudre une équation : précisons maintenant ce qui est réellement rencontré.

P demande aux élèves de lire un texte intitulé « *ACTIVITÉ : les équations* » et comportant, on l'a vu, d'une part, en italique, le récit d'un défi lancé par Arthur à Claire à propos d'un jeu numérique et la demande de la stratégie utilisée par Arthur pour relever le défi ; d'autre part, en caractères droits, deux questions. La première question est une activité numérique simple, obligeant à suivre la chronologie du récit précédent, permettant de montrer qu'Arthur est face à une tâche problématique : il ne peut répondre au hasard. Cette question motive donc la recherche d'une stratégie.

[6] On pourra se reporter à l'annexe « Moments de l'étude et programmes scolaires » du texte d'Yves Chevallard Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions

La deuxième question donne une stratégie pour relever le défi, une technique de modélisation τ_m : « On imagine que l'on a trouvé la solution et que l'on fait la vérification. Pour cela on représente le nombre cherché par une lettre : *x*. Que peut-on écrire ? ». Cette deuxième question annule donc le caractère problématique de la question en italique figurant dans l'exposé de la situation « Comment Arthur va-t-il faire pour trouver le nombre en question ? ». Les interventions de P qui suivent le bref épisode de travail individuel confirment d'ailleurs qu'il ne s'agit pas de répondre à cette question mais aux questions en caractères droits :

> (P) Alors, de quoi s'agit-il ? Vous avez tous pris connaissance du document ?
> Il n'y a pas de réponse nette et P lit elle-même la première partie de l'énoncé (la devinette) et la première question.
> (P) Alors, comment on va faire pour savoir ?
> Plusieurs doigts se lèvent. Un élève est interrogé. Il reprend l'enchaînement des opérations et P, sous sa dictée, y compris les parenthèses et les crochets, écrit au tableau : $[(7+3)\times 5] - 7$
> (P) Alors, combien on trouve ?
> (élève) 43 !
> (P) Effectivement. Alors, est-ce que ça marche ?
> (élèves) Non !
> P complète alors au tableau « $[(7+3)\times 5] - 7 = 43$ » puis au-dessous « 7 n'est pas le nombre choisi ».
> À ce moment-là un élève indique que la réponse est 8. P ne reprend pas la réponse mais demande à la classe comment répondre à la deuxième question.
> Comme précédemment, un élève interrogé dicte au professeur qui écrit au tableau : $[(x+3) \times 5] - 7 = 48$.

La partie en italique du texte utilisé joue le rôle d'une situation du monde *s*, non mathématique et ludique même si des nombres y sont en jeu, où Arthur, acteur de cette situation, se vante de pouvoir accomplir une tâche ✓ : répondre à une devinette. Ce genre de tâches est culturellement connu des élèves et peut tout à fait motiver une tâche de type T_m puis une tâche de type T_r qui peuvent surgir pour accomplir la tâche *t* : trouver le nombre choisi par Claire. On aurait pu alors demander aux élèves de se mettre à la place d'Arthur et de modéliser le problème afin d'accomplir la tâche problématique *t*.

D'autres modalités pouvaient être envisagées : partir d'une situation simple, du type de celle où se trouve Arthur, où la solution est accessible à une majorité d'élèves par tâtonnement, puis proposer une situation plus complexe où un tâtonnement raisonné est nécessaire pour aboutir comme c'est le cas dans le corpus Pg, voire une situation où le tâtonnement permet difficilement d'aboutir (les solutions peuvent, par exemple, être choisies rationnelles non évidentes, ou encore il est possible, par ce type de problème, de faire émerger des équations de degré supérieur à un). On peut également envisager, dans un second temps, comme le propose le formateur qui a rapporté sur cette séance, de demander aux élèves de produire eux-mêmes des énoncés du même type ou en produire qui aboutissent à des équations faussement du premier degré comme « je pense à un nombre, je lui ajoute 3, je multiplie par 2 et j'obtiens le double de ce nombre plus 6. À quel nombre avais-je pensé ? », motivant ainsi l'étude des équations particulières du type $0x = 0$.

Ce type de problème offre donc un éventail important de possibilités et on peut s'interroger sur les raisons qui conduisent ce professeur à ne pas les utiliser et à restreindre, par les questions posées, l'autonomie des élèves en imposant la modélisation.

Il est clair que l'objet de l'activité est pour P la production d'une équation à partir de laquelle, comme dans une leçon de choses, à partir du spécimen que la classe a sous les yeux, P va conduire une « dissection » méthodique, afin d'introduire des éléments de l'environnement technologico-théorique. P lui assigne peut-être aussi comme fonction de motiver l'étude du type de tâches T_r : ce choix n'est cependant pas pertinent dans la mesure où, d'une part, certains élèves peuvent se passer de l'équation ; d'autre part, une fois l'équation produite, toute l'attention de P est centrée sur le spécimen – qui perd, de ce fait, son caractère d'objet permettant de répondre à la question de stratégie d'Arthur.

On peut faire ici l'hypothèse que ce professeur débutant ne veut pas prendre le risque de ne pas voir apparaître d'équations, objet dont l'étude est visée, comme c'est le cas dans le corpus Pg (annexe D3). Il met alors en scène un dispositif où il donne lui-même aux élèves un bloc [τ/θ] pour une tâche de type T_m, également objet d'étude. Mais au delà du fait que, pour l'émergence de ce bloc, les élèves n'ont aucune autonomie, on peut faire l'hypothèse que cet apport technique et technologique passera inaperçu car il ne sera ni repris ni traité comme élément didactique au service de l'étude d'une autre organisation mathématique. On assiste ainsi à une rencontre ratée avec T_m afin que soit assurée la rencontre avec T_r.

4.3. *À propos de la démonstration des « règles de conservation des égalités »*

Nous avons souligné précédemment la rapidité avec laquelle les règles de conservation des égalités sont traitées. La justification de ces règles s'appuie ici, comme dans les deux autres corpus, sur les règles de fonctionnement d'une balance. On peut alors s'interroger sur un tel type de justification et imaginer démontrer ces règles.

La démonstration des « règles de conservation des égalités » nécessite d'abord la définition de ce que signifie l'expression «*conservation des égalités* ». Plusieurs interprétations de la nature d'une telle égalité entre expressions littérales sont possibles. En cohérence avec les études prescrites en classe de 5^{e} dans le secteur « Initiation à la résolution d'équation » du domaine « Calcul numérique » on peut énoncer que, f et g étant deux expressions littérales s'écrivant avec des nombres, une seule lettre x et les quatre opérations, ces deux expressions sont égales pour la valeur numérique x_0 de x, si , substituant x_0 à x dans f et dans g on obtient la même valeur numérique. On peut également écrire que, f et g étant deux fonctions affines ou plus généralement deux fonctions d'une variable x, ces deux fonctions sont égales pour la valeur x_0 si elles prennent la même valeur en ce point, ou encore si leurs graphes se coupent au point d'abscisse x_0. Ceci, bien que préparé en 5^{e} et 4^{e} comme en témoignent les commentaires du programme du cycle central énoncés plus haut, ne sera étudié qu'en 3^{e} et surtout en 2de, lorsque le travail sur les fonctions sera plus avancé. On notera à cet égard que c'est ainsi que la résolution d'équation du premier degré à une inconnue était étudiée dans le cadre des programmes de 1982. (Voir par exemple P. Aguilar, P. Louquet et L. Moulia. *Mathématiques classe de 4^{e}*. Paris : Armand Colin, 1983. p. 177.)

Il semble qu'aucune ambiguïté ne puisse avoir lieu avec une égalité au sens de l'identité de deux polynômes puisque celle-ci n'a pas encore été rencontrée, les identités remarquables n'étant véritablement étudiées qu'en classe de 3^{e}. Certains ouvrages attirent toutefois l'attention sur la différence entre « *l'égalité $2x + 3 = x + 8$ est-elle vraie ?* » et « *résoudre l'équation $2x + 3 = x + 8$* » (voir par exemple G. Chapiron *et al.* Mathématiques classe de 4^{e}. Paris : Hatier, 1998. p.128.), mais les élèves de 4^{e} n'ont pas d'éléments pour répondre à la première question.

En cohérence avec les programmes de 6^{e} et de 5^{e}, « *conserver une égalité* » c'est donc transformer les deux expressions littérales f et g en deux expressions littérales f' et g' égales pour les mêmes valeurs numériques que f et g.

Dans ce cadre, voici une démonstration possible de la première règle : « *Quand on a une égalité, si on soustrait ou on ajoute une* même *quantité à chaque membre, on a toujours une égalité.* ».

> Soit $ax + b = cx + d$ une égalité. Si le nombre ax_0+b est égal au nombre cx_0+d alors, pour tout nombre e, les nombres $ax_0+b+(-)e$ et $cx_0+d+(-)e$ sont égaux par unicité du résultat d'une addition ou d'une soustraction. Donc si x_0 vérifie l'égalité $ax + b = cx + d$ alors il vérifie $ax+b+(-)e = cx + d+(-)e$ pour tout nombre e. Réciproquement, si x_0 vérifie l'égalité $ax+b+(-)e = cx + d+(-)e$, en vertu de ce que l'on vient d'établir, il vérifie $ax+b+(-)e-(+)e= cx + d+(-)e-(+)e$, soit encore $ax + b = cx + d$.[7]

Dans le premier corpus, on a vu P clore la question de la justification de ces règles en « *évoquant et mimant rapidement le principe d'une balance* ». Si quelques éléments technologiques sont donnés, aucune démonstration n'est envisagée. Dans le second corpus (annexe D2), les définitions sont également données, et Pc, rappelant l'activité mettant en jeu des balances dans la séance précédente, fait émerger et écrire deux propriétés sur les quantités numériques ; voici la première : « *<u>Propriété 1</u> : a et b sont des nombre relatifs égaux. On peut ajouter ou soustraire un même nombre relatif c aux deux membres de l'égalité, on a toujours une égalité* ». Elle est suivie de l'expression littérale correspondante : « *Si* $a = b$ *alors* $a + c = b + c$ *et* $a - c = b - c$ ». Les élèves réagissent, « *Mais c'est pas des équations ça* », ne percevant pas la relation avec les équations de la forme $ax + b = c$ qui leur sont familières. La technique correspondante est toutefois adoptée par les élèves qui traitent les expressions littérales comme les quantités numériques. La seconde propriété sera abordée de la même façon.

Dans le troisième corpus, Pg met en place un scénario très guidé pour introduire, à partir de la conservation de l'équilibre sur une balance, par un mimétisme construit pas à pas, les règles de conservation des égalités et aucune démonstration n'est évoquée.

L'examen des ouvrages utilisés en collège montre qu'actuellement très peu d'auteurs abordent cette démonstration. À d'autres époques, après un traitement mobilisant des segments et s'appuyant sur les techniques préalablement travaillées pour introduire les calculs abstraits, on montre, en général sur un exemple, que l'on peut remplacer une équation par l'équation obtenue en retranchant un même nombre aux deux membres, la balance étant évoquée comme recours mnémotechnique (voir annexe D4). Si l'on peut facilement comprendre la disparition des segments, la place prise par les balances surprend : il ne reste plus guère de tels instruments de pesée que dans les catalogues de matériel didactique. On peut faire l'hypothèse que la prégnance d'un tel système vient de la possibilité de justifier à peu de frais et rapidement les règles visées.

Qu'est-ce qui empêche qu'une telle démonstration vive dans le système d'enseignement aujourd'hui ? Interrogés à ce sujet, des enseignants de collège pensent ne pas pouvoir «l'imposer » à leurs élèves. Sans doute peut-on y voir aussi le sentiment que les élèves ne percevraient pas la nécessité mathématique de la démonstration d'une propriété pouvant paraître assez « naturelle ». Pour aller plus loin dans l'examen de la viabilité d'une telle démonstration en classe de 4e, il serait nécessaire d'étudier les techniques travaillées en calcul littéral et à propos des équations en classe de 6e et 5e ainsi que la familiarité des élèves avec celles-ci.

[7] On pourrait aussi s'appuyer sur le fait que $a=b \Leftrightarrow a-b = 0$: voir par exemple G. Chapiron *et al.* 1998 pages 127 et 128. On notera que la règle de transposition est une application de celle-ci pour $e = -b$. La seconde règle : « *Quand on a une égalité, si on la multiplie ou si on la divise par un même nombre non nul, on obtient une nouvelle égalité* », se démontrerait de la même façon.

5. CONCLUSION

L’analyse praxéologique a permis de mettre en évidence, d’une part, la structure de l’organisation mathématique de la séance en différenciant les divers types d’éléments entrant dans cette organisation ainsi que leurs relations ; d’autre part, la structure de l’organisation didactique qui s’avère plus complexe que la structure ternaire maintenant classique : « activité/synthèse/exercices ». Cette analyse montre l’enchevêtrement de différents moments avec des fonctions très diverses changeant parfois très rapidement. Par exemple, des gestes d’institutionnalisation peuvent se repérer à différents endroits de la séance sans qu’une situation d’institutionnalisation soit clairement identifiable.

Si des réalisations très diverses, et plus ou moins pertinentes, peuvent être identifiées, elles témoignent toutes d’un déficit technologico-théorique concernant le secteur du calcul littéral et le statut des objets de l’algèbre et d’une difficulté à situer l’étude d’une organisation mathématique dans l’environnement du secteur ou du domaine mathématique dont elle relève.

ANNEXE – LISTE DES DOCUMENTS FIGURANT SUR LE CÉDÉROM

Annexe D1 : Les équations en classe de quatrième – Corpus P
Annexe D2 : Les équations en classe de quatrième – Corpus Pc
Annexe D3 : Les équations en classe de quatrième – Corpus Pg
Annexe D4 : Schaffer et Lebaile 1954, pages 151-152

ANNEXE D1

Les équations en classe de quatrième – Corpus P

La classe observée est une classe de quatrième d'un bon lycée d'un effectif de 28 élèves dont 4 redoublants. Elle est considérée par son professeur de mathématiques comme très hétérogène, mais avec une très bonne tête de classe. La séance observée se déroule le lundi 5 mars, jour de la rentrée des vacances d'Hiver. Il s'agit de la première séance de l'année portant sur les équations.

1. Les élèves entrent en classe alors que le professeur et l'observateur sont déjà dans la place. Après une installation relativement rapide et silencieuse, P rend un devoir à quelques élèves réunis autour de son bureau et distribue à d'autres un devoir à faire hors classe. (En fait, quelques élèves se sont absentés avant les vacances et P leur fait donc rattraper le travail qu'ils ont manqué.)
2. Ensuite P distribue à toute la classe une feuille comportant l'énoncé reproduit ci-dessous :

> <u>ACTIVITÉ : les équations</u>
>
> *Arthur dit à Claire :*
> *" pense à un nombre ;*
> *ajoute lui 3 ;*
> *multiplie ce que tu obtiens par 5 ;*
> *enlève 7 à ce que tu obtiens.*
> *Dis-moi combien tu trouves et je te dirais le nombre que tu avais choisi. " Claire a obtenu 48.*
> *Comment Arthur va-t-il faire pour trouver les nombre en question ?*
>
> 1. Claire a-t-elle pensé au nombre 7 ?
> 2. On imagine que l'on a trouvé la solution et que l'on fait la vérification. Pour cela on représente le nombre cherché par une lettre : x.
>
> Que peut-on écrire ?

3. (P) Aujourd'hui, nouveau chapitre… Vous prenez votre cahier d'exercices… Vous commencez à lire l'activité. Allez ! On se met au travail !
4. Pendant moins d'une minute, le silence règne dans la classe et les élèves suivent la consigne. Mais très rapidement P intervient :
5. (P) Alors, de quoi s'agit-il ? Vous avez tous pris connaissance du document ?
6. Il n'y a pas de réponse nette et P lit elle-même la première partie de l'énoncé (la devinette) et la première question.
7. (P) Alors, comment on va faire pour savoir ?
8. Plusieurs doigts se lèvent. Un élève est interrogé. Il reprend l'enchaînement des opérations et P, sous sa dictée, y compris les parenthèses et les crochets, écrit au tableau : $[(7+3)\times5] - 7$
9. (P) Alors, combien on trouve ?
10. (élève) 43 !
11. (P) Effectivement. Alors, est-ce que ça marche ?
12. (élèves) Non !
13. P complète alors au tableau " $[(7+3)\times5] - 7 = 43$ " puis au-dessous " 7 n'est pas le nombre choisi ".
14. A ce moment-là un élève indique que la réponse est 8. P ne reprend pas la réponse mais demande à la classe comment répondre à la deuxième question.
15. Comme précédemment, un élève interrogé dicte au professeur qui écrit au tableau : $[(x+3) \times 5] - 7 = 48$.

16. puis interroge :
17. (P) Qu'est-ce qu'on a fait finalement ?
18. (élève) Un raisonnement avec une inconnue.
19. (élève) Une équation.
20. (P) Ça c'est ce qu'on va appeler une équation. Qu'est-ce qu'on veut faire ?
21. (élève) Trouver *x*.
22. (P) Oui et comment faire ?… Comment a-t-on fait pour trouver 7 à partir de43 ?
23. (élève) 43 plus 7 divisé par 5 moins 3.
24. (P) Très bien ! Quelles opérations permettent de retrouver 7 à partir de 43 ? Jen, répète…
25. Jen répète correctement et P écrit [(43+7) : 5] – 3 = 7.
26. (P) Maintenant, on va faire pareil pour *x*. Kar ?
27. (Kar) [(48+7) : 5] – 3.
28. (P) Ça fait combien ça ?
29. (Kar) 8.
30. (P) Ça signifie quoi, que *x* est égal à 8 ?
31. (élève) Que l'inconnue est égale à 8.
32. (P) Ça signifie quoi, pour l'équation ?
33. (élève) Qu'on a résolu l'équation.
34. (P) Mais plus précisément, c'est quoi une équation ?… C'est une phrase mathématique qui se présente comment ?
35. (élève) Une égalité.
36. (P) Oui, alors qu'est-ce qu'on peut dire de 8 ?
37. (élève) C'est le nombre qui permet de trouver l'égalité.
38. (P) Est-ce que c'est vrai pour tout *x* ?
39. (élève) Non !
40. (P) Si $x = 7$, est-ce que l'égalité est vraie ?
41. (élève) Non !
42. (P) Si $x = 8$, est-ce que l'égalité est vraie ?
43. (élève) Oui !
44. (P) Donc 8 est le nombre pour lequel l'égalité est vraie. On va dire que 8 est la… ?
45. (élève)…
46. (P) Vous connaissez pas ? Non ? Allez, réveillez-vous ! Je sais bien que c'est la rentrée… On dit que 8 est la solution de l'équation. Qu'est-ce qu'on peut faire pour vérifier ?
47. P écrit au tableau la vérification et poursuit :
48. (P) D'après vous est-ce que ce sera une technique classique ?
49. (élève) Oui !
50. (P) Vous croyez vraiment ?
51. (élève) Non…
52. (P) Bon. On va noter dans le cahier de cours tout ce qu'on a rencontré là…
53. P écrit le titre " Les équations " puis " I. Définition ".
54. (P) Vous prenez le cahier de cours… Ceux qui n'ont pas eu les deux fiches sur les droites remarquables, vous sautez deux pages et vous venez me les réclamer à la fin.(*P dicte tout en écrivant au tableau.*) On considère l'égalité suivante…
55. (élève) En rouge ?
56. (P) En bleu. Les mots soulignés en rouge… On considère l'égalité suivante $2x + 5 = x - 4$. Cette égalité s'appelle une <u>équation</u>. Alors, *x* c'est quoi ?
57. (élève) C'est l'inconnue.
58. (P) Très bien ! On va l'écrire… *x* est l'<u>inconnue</u> de cette équation. Comment s'appelle cette partie là ? Vous le savez ou pas ?
59. (élève)…
60. (P) $2x + 5$ est le <u>membre de gauche</u> de l'équation et $x – 4$ est le <u>membre de droite</u> de l'équation… Alors, on va s'intéresser un petit peu à tout ce qu'on a dit tout à l'heure… Résoudre une équation, c'est quoi ?
61. (élève) Trouver l'inconnue.
62. (P) Plus précisément ?

63. (élève) Mais celle-là, elle est pas résolue !
64. (P) Non.
65. (élève) Trouver l'égalité entre le membre de gauche et le membre de droite.
66. (P) Oui, c'est ça ! Parce que je peux toujours remplacer x par quelque chose, il n'y aura pas forcément égalité… Vous voyez ça ? résoudre une équation, c'est pas trouver x tout court. (*P reprend sa dictée tout en écrivant au tableau.*) Résoudre une équation d'inconnue x c'est trouver la valeur de x telle que l'égalité soit vraie.
67. P s'éloigne du tableau tout en poursuivant la dictée puis y revient et corrige sans commentaire en remplaçant " la valeur " par " les valeurs ". Puis elle poursuit : " Ces valeurs sont appelées les solutions de l'équation ". P propose alors un exemple.
68. (P) Exemple. Soit l'équation suivante : $3x - 4 = 7x - 20$. Est-ce que 2 est solution de cette équation ? Luc ?
69. (Luc) On essaie de remplacer x par 2… 3 fois 2 moins 4, ça fait 2… Et après on calcule 7 fois 2 moins 20… Ça fait –6.
70. (P) Alors, la réponse à la question ?
71. (Luc) Non.
72. (P) Ne remplacez pas par x dans l'égalité tant que vous ne savez pas si c'est égal ou pas… Alors, Est-ce que 4 est solution de l'équation ? Mar ?
73. (Mar) On fait 3 fois 4 moins 4, ça fait 8. Si on fait 7 fois 4 moins 20, ça fait 8. Donc c'est la solution. (P ne relève pas.)
74. (P) Vous écrivez que 2 n'est pas solution, mais que 4 est solution de l'équation… Maintenant, vous reprenez l'activité, on va continuer.
75. (élève) Qu'est-ce qu'on marque quand on peut pas la résoudre ?
76. (P) Celles que vous aurez, vous pourrez toujours les résoudre.
77. (P) Mais quand il n'y a pas de solution…
78. (P) On verra… On reprend l'activité…Le fait de remonter les calculs, c'est pas très pratique. On va voir une autre méthode… On veut arriver à quel genre d'expression ?
79. (élève) x égale un nombre.
80. (P) Oui. On veut arriver à x égale un nombre. D'après vous, qu'est-ce qu'on peut faire ?
81. (élève) On fait l'inverse.
82. (P) C'est ce qu'on a fait tout à l'heure…Si vous vous retrouvez avec des équations plus compliquées… ?
83. (élève) On développe. On fait $5x + 15 - 7 = 48$. Après on fait $5x + 8 = 48$…
84. (P) (*L'élève veut poursuivre, mais P l'arrête.*) Maintenant, pour que le 8 disparaisse, qu'est-ce qu'on peut faire ?
85. (élève) On enlève le 8 de chaque côté.
86. (P) Pourquoi on a le droit ?
87. (élève)…
88. P répond alors en évoquant et en mimant très rapidement le principe d'une balance et poursuit :
89. (P) Donc on va l'écrire quelque part.
90. (élève) En rouge ?
91. (P) Non, pas en rouge, on est en activité… (*P dicte, tout en interrogeant la classe et dialogue avec celle-ci.*) Quand on a une égalité, si on additionne ou on soustrait le même nombre aux deux membres de l'équation, on a toujours une égalité… Alors qu'est-ce qu'on obtient ? Océ ?
92. (Océ) $5x = 40$.
93. (P) Oui. J'écris l'étape intermédiaire… $5x + 8 - 8 = 48 - 8$…
94. (P) On va finir de résoudre… $5x = 40$… $x = 8$…
95. (P) Maintenant, on va voir quelques exemples… $x + 12 = 36$… $5x = 4x - 2$…
96. (élève) On fait $x + 12 - 12 = 36 - 12$.
97. (P) Très bien. On enlève 12 de chaque côté… $x = 36 - 12$… $x = 24$. Et là, qu'est-ce qu'on fait ?
98. (élève) On fait $5x - 4x = 4x - 4x - 2$
99. (P) On enlève x à chaque membre… $5x - 4x = -2$… $x = -2$… Est-ce que vous voyez une règle ?
100. (élève) C'est comme si on mettait les x avec les x.
101. (élève) On regroupe les x entre eux.
102. (P) Ça, c'est le but. Mais moi je veux une règle de calcul qui commence à apparaître…

103.(élève) On inverse le nombre.
104.(P) Non, c'est pas l'inverse. Si je te donne 5, c'est quoi l'inverse ?
105.(élève) 1/5 Ah oui ! C'est l'opposé…
106.(P) On va écrire qu'on constate que quand un nombre… non, un terme… change de membre dans une équation… Alors ?… Il change de signe… C'est noté ?…
107.(P) On va voir quelques petits exemples. Vous écrivez $x - 45 = 15$, ensuite $1{,}1 + u = 3{,}2$ et $5y - 3 = 4y$… Vous sautez trois lignes… Celles-là on va les faire maintenant…
108.(P) Et pour jeudi…$x + 9 = 36$, $5z + 6 = 4z$, $6 + 5x = 6x + 2$ et $3{,}6 - x = 9{,}6$… Vous notez sur vos agendas de résoudre ces équations pour jeudi… On change de salle jeudi…
109.(élève) C'est juste pour cette semaine ?
110.(P) Non, c'est définitif.
111.Allez, on résout ces équations… $1{,}1 + u = 3{,}2$… Jes ?
112.(Jes) $u = 3{,}2 - 1{,}1$.
113.(P) Oui. Vous voyez que n'importe quelle lettre fait l'affaire. Finalement ?
114.(Jes) $u = 2{,}1$.
115.La sonnerie retentit. P conclut en demandant aux élèves de faire aussi pour jeudi les deux équations restantes. La séance est terminée.

Les équations

I] Définition

- On considère l'égalité
  $2x + 5 = x - 4$

Cette égalité est appelée une équation.
x est l'inconnue de cette équation.

- $2x + 5$ est le membre de gauche de l'équation.
  $x - 4$ est le membre de droite de l'équation.

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est trouver la valeur de x telle que l'égalité soit vraie.

Ces valeurs sont appelées solutions de l'équation.

Exemple :

$3x - 4 = 7x - 20$

1) Est-ce que 2 est la solution de cette équation ?

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 2 - 4 = 2 \\ 7 \times 2 - 20 = -6 \end{array}\right\} \text{Ce n'est pas la solution.}$$

2) Est-ce que 4 est la solution de l'équation?

$3 \times 4 - 4 = 8$

$7 \times 4 - 20 = 8$

C'est la solution.

II] Résolution d'une équation

1) Égalité et somme ou soustraction

Propriété :

Quand on a une égalité, si on soustrait ou on ajoute une même quantité à chaque membre on a toujours une égalité.

Exemple :

$3x - 4 = 2x + 20$

$3x - 4 + 4 = 2x + 20 + 4$

$3x = 2x + 24$

$3x - 2x = 2x + 24 - 2x$

$\boxed{x = 24}$

Règle de transposition :

Quand on change un terme de membre, il change de signe.

Exemple :

$3x - 4 = 2x + 20$

$3x - 2x = 20 + 4$

$x = 24$

2) Égalité et multiplication ou division

Propriété :

Quand on a une égalité, si on la multiplie ou on la divise par un même nombre non nul, on obtient une nouvelle égalité.

Exemple :

$\frac{8}{3}x = 7$

$3 \times \frac{8}{3}x = 3 \times 7$

$8x = 21$

$\frac{8x}{8} = \frac{21}{8}$

$\boxed{x = \frac{21}{8}}$

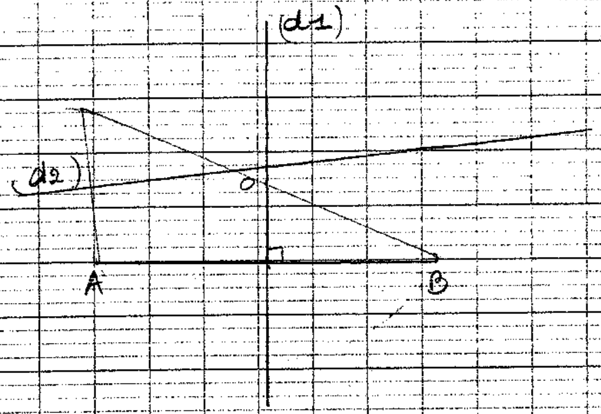
3) Cas particuliers

• Si après les calculs on a une égalité du type $0 \times x = b$ avec $b \neq 0$.

Alors cette équation n'a pas de solution.

exemple : $0 \times x = 3$

ex n° 38 page 173 :



Je trace le segment [AB].
(d1) est sa médiatrice.
(d1) et (d2) se coupent en O.
Comme les médiatres d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit, je trace ce cercle

ACTIVITE : les équations

Arthur dit à Claire :
« pense à un nombre,
ajoute lui 3,
multiplie ce que tu obtiens par 5,
enlève 7 à ce que tu obtiens.
Dis moi combien tu trouves, je te dirai le nombre que tu avais choisi. »
Claire a obtenu 48.
Comment Arthur va-t-il faire pour trouver le nombre en question ?.

1. Claire a-t-elle pensé au nombre 7 ?
2. On imagine que l'on a trouvé la solution et que l'on fait la vérification. Pour cela, on représente le nombre cherché par une lettre : *x*.
   Que peut-on écrire ?

1) $[(7+3)\times 5] - 7 = 43$
$\neq 48$ $\Rightarrow$

7 n'est pas le nombre choisi.

2) $[(x+3)\times 5]-7=48$

Quelles opérations permettent de retrouver 7 à partir de 43?
$[(43+7):5]-3=7$

$(48+7):5-3=8$
8 est la solution de l'équation.

Vérifions:
$[(8+3)\times 5]-7=48$ → on veut arriver à $x=$ nb

$5x+15-7=48$ $\quad 5x+8=48$
Quand on a une égalité, si on additionne ou on soustrait le même nombre aux 2 membres de l'équation, on a toujours une égalité.

$5x+8-8=48-8$
$5x=40$
$\boxed{x=8}$

ÉTAPES
1) On développe $5x+8=48$
2) On transpose $5x=48-8$
$5x=40$
3) On divise les deux membres par 5
$\frac{5x}{5}=\frac{40}{5}$ $\boxed{x=8}$

Exercice:
$x+12=36$
$x+12-12=36-12$
$x=36-12$
$x=24$

$5x=4x-2$
$5x-4x=-2$
$x=-2$

On constate que quand un terme change de membre dans une équation, Le change de signe.

$x - 4,5 = 15$	$1,1 + u = 3,2$	$5y - 3 = 4y$
$x = 4,5 + 15$	$u = 3,2 - 1,1$	$5y - 4y = 3$
$x = 60$	$u = 2,1$	$y = 3$

$x + 9 = 36$	$5z + 6 = 4z$	$6 + 5x = 6x + 2$
$x = 36 - 9$	$5z - 4z = 6$	$2 + 6 = 6x - 5x$
$x = 27$	$z = -6$	$x = 4$

$3,6 - x = 9,6$

$x = 9,6 - 3,6$

$x = 6$

$x = 6$

Exercice :

$5x = 40$	$7x = 42$	$5u = 22$	$\frac{1}{3} z = 4$
$\frac{5x}{5} = \frac{40}{5}$	$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$	$\frac{5u}{5} = \frac{22}{5}$	$3 \times \frac{1}{3} z = 3 \times 4$
$x = 8$	$x = 6$	$u = 4,4$	$z = 12$

ANNEXE D2

Les équations en classe de quatrième – Corpus Pc

La classe observée est une des huit classes de quatrième. C'est une classe où certains élèves ont un retard important, un tiers de la classe a déjà redoublé au moins une fois. C'est néanmoins une classe qui fonctionne plutôt bien, où il n'y a pas de problème d'insolence ou de violence, où le contact avec la plupart des professeurs est agréable et sympathique.
Il s'agit ici de la deuxième séance de l'année portant sur les équations.

1. Les élèves se tiennent debout près de leur table et à un signal de P, ils prennent place dans le calme. P : On va commencer par se rafraîchir la mémoire sur ce qu'on a fait lundi.
2. Un discussion s'engage alors sur un devoir à la maison dont l'énoncé a été distribué deux jours plus tôt qu'à l'habitude et qu'un élève n'a pas identifié comme tel. P conclut : Vous avez deux jours de plus pour le commencer ! Un élève renchérit : De toute façon c'est pas la peine de faire des histoires. Quelques élèves sortent la feuille de devoir
3. P leur confirme : C'est pour vendredi prochain !
4. P : On va commencer par l'activité faite ce lundi.
P indique aux élèves de ne pas ouvrir leur cahier, car on peut s'en souvenir de tête.
5. P : Qui peut me dire de quoi on a parlé ? Trois doigts se lèvent. Med est invité à parler
6. Med : On a fait petit x !
7. P : Ça parlait de quoi ?
8. Med : Des équations !
9. P : Qui peut me rappeler la situation de laquelle on était parti ?
10. Fre : Les chaussures !
11. P confirme : Des chaussures, sur un système de ?
12. E : De balance.
13. P : Bien, alors qu'est-ce qu'on cherchait avec ces chaussures ?
14. E : Le poids des chaussures, x
15. P : Qu'est-ce qu'on a fait pour déterminer ce x ? Une réponse : On a pesé !
16. P rappelle une consigne apparemment oubliée : On lève la main ! Med a encore le doigt levé.
17. P : Il n'y a pas que Med dans la classe ! Car ?
18. Car : On a modifié des poids à chaque fois.
19. P : Oui, on a modifié les poids des balances.
20. Un élève : On a calculé le poids de la balance… d'un côté de la balance pour savoir.
21. P fait au tableau le dessin d'une balance en marquant $2x + 10$ au-dessus du plateau de gauche et 140 au-dessus de celui de droite.
22. P : Et qu'est ce qu'on avait de particulier sur cette balance ?
23. E : C'était égal ! L'équilibre !
24. P reformule : Donc on avait une égalité ! Et ensuite qu'est-ce qu'on a fait avec cette égalité ? On a cherché ?
25. Fre : Le poids d'une chaussure.
26. P : D'un point de vue mathématique on a cherché x
27. P : On avait pour cela utilisé des propriétés qu'on va mettre aujourd'hui dans la cahier de synthèse ! Vous sortez votre cahier de synthèse.
28. Les élèves : Le cahier de Cours ?
29. P confirme. P précise : Après le calcul littéral, cahier de cours, coté calcul. Et P indique au tableau :

Cahier de cours
- **Calcul**
- **Nouveau chapitre**

Les élèves sont invités à inscrire ce qui suit sur leur cahier :

<u>Equations et problèmes</u>
<u>Vocabulaire</u>

30. P interroge : Qui peut me dire ce qu'est un équation ? Une élève se propose.

31. Sop : Une équation, c'est une égalité.
32. P : Avec quoi ?
33. Sop : Avec une lettre, une inconnue
34. P inscrit au tableau :

1. Une équation est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, souvent noté *x*

35. P poursuit : Par exemple, qui peut me citer une équation ? Deux doigts se lèvent
36. P : Vin !
37. Vin : $5x + 2$.
38. P en voudrait davantage : Egale ?
39. Vin : 8.
40. P confirme : $5x + 2 = 8$ est une équation. C'est une égalité où intervient un nombre *x*.
41. P : Passons à une deuxième définition. Qu'est-ce que résoudre une équation ?
42. E : C'est trouver *x*
43. Au tableau :

2. Résoudre une équation c'est trouver les valeurs de *x* possibles…

On a à peine le temps de voir le passage d'un surveillant qui collecte les billets d'absences
P termine la phrase entamée :

2. Résoudre une équation c'est trouver les valeurs de *x* possibles, qui vérifient l'égalité donnée.

44. Les élèves copient dans le plus grand calme !
45. P : Alors je vais vous faire des petits rappels, vous ne les prenez pas sur votre cahier. Ce sont des choses que vous savez déjà faire.
Tout en la notant au tableau P demande de résoudre l'équation $x + 3 = 4$.
46. P : Comment est-ce qu'on l'a résolue ? Beaucoup de doigts sont levés.
47. P : Char ?
48. Char : Ben 4 moins 3.
49. Un autre élève : C'est l'opération inverse de… (?).
50. P ignore cette dernière remarque et poursuit : Ça vous savez le faire depuis longtemps. Au tableau :

$$\begin{aligned} x + 3 &= 4 \\ x &= 4 - 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

51. Le même traitement est appliqué à l'équation $3x = 5$.
52. Une élève interrogée : 5 divisé par 3.
53. P confirme : C'est la définition du quotient. C'est le nombre par lequel on multiplie 3 pour obtenir 5. On écrit donc le quotient de 5 par 3

$$\begin{aligned} 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

54. P : Ensuite, l'an dernier aussi vous avez appris à résoudre celle-ci

$$\frac{4}{x} = 2$$

55. P : Que vaut *x* ? Bien qu'un élève précis soit interrogé, un autre propose : 2 fois 4.
56. P : Non parce que ça ferait 8. On entend : 2 divisé par 4 ! D'autres : 4 divisé par 2 !
57. P note le résultat comme suit :

58. P indique qu'ils ont du apprendre cela en classe cinquième. Un élève : Pourquoi ?
59. P explique : Si on fait par le produit en croix on obtient 2 fois *x* qui est égal à 4 fois 1. Cela fait $2x$ égal 4, puis 4 demis ! Donc par le produit en croix en le retrouve !

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Les élèves notent.
60. P ajoute : C'est bon pour tout le monde ? On peut toujours vérifier les solutions d'une équation !
61. P : Alors, on va voir dans cette partie comment on résout des équations qui sont un peu plus complexes que celles-ci .
Vous marquez au tableau (*tout en effaçant ce qui y était inscrit*)

<u>I . Résolution d'équation</u>
1. <u>Une propriété des égalités</u>

62. P : On a rencontré cette propriété l'autre jour dans l'activité, grâce aux balances. On va essayer de se remémorer cette propriété. P note au tableau :

<u>Propriété 1</u>

63. P : Je vais vous aider. On est parti de l'égalité *a* = *b*, où *a* et *b* sont des nombres quelconques.
a = *b* , alors on avait :
a + *c* … *b* + *c*
a – *c* … *b* – *c*
64. E : Mais c'est pas des équations ça ?
65. P temporise : On va voir.
66. Un élève se souvient : Si on ajoute un nombre à ces deux…
67. P : Au départ, il faut qu'ils soient quoi les nombres ?
68. E : Egaux.
69. P inscrit au tableau : *a et b sont des nombres relatifs égaux.* Et, avec la collaboration des élèves :

<u>Propriété 1</u>
***a* et *b* sont des nombres relatifs égaux. On peut ajouter ou soustraire un même nombre relatif *c* aux deux membres de l'égalité, on a toujours une égalité**

70. Un élève critique : On le dit dix fois *égalité*
71. P ajoute : On l'écrit aussi sous cette forme là !

Si *a* = *b* alors $\begin{cases} a+c=b+c \\ a-c=b-c \end{cases}$

72. P : Donc on peut ajouter ou soustraire un même nombre de chaque côté ! Si c'est une égalité au départ, c'est une égalité à l'arrivée. Alors on l'écrit aussi sous cette forme. Maintenant on va voir un exemple, un exemple où vous connaissez la solution. On pourra voir comment ça marche

<u>Exemple :</u>
***x* + 2 = 5**

73. P : Comment trouver ? Qu'est-ce qu'on va ajouter ou soustraire des deux côtés ? Comment faire pour trouver x ? Certains élèves parlent.
74. P : On lève la main
75. On parvient à énoncer et écrire : Je soustrais 2 des deux côtés

***x* + 2 - 2 = 5 – 2**
***x* = 3**

76. P commente : C'est bien ce qu'on sait faire ! Ça se démontre comme ça, il suffit de retrancher 2 de chaque côté !
77. Un élève : Mais pourquoi *x* + 2 – 2 ?
78. P : Pour passer de là à là, je soustrais 2 des deuxcôtés. Et ça reste une égalité ! Et ça tu sais le faire spontanément. Nous on l'a montré. Maintenant on va le faire sur un exemple un peu plus complexe

<u>Utilisation :</u>

79. P : Cette propriété va donc nous servir à résoudre des équations, par exemple :

Résoudre : 2*x* – 4 = *x* + 3

80. P : Là, le x il apparaît dans le membre de gauche et le membre de droite ! Un élève : C'est pareil ! P : Qu'est-ce que vous proposez pour trouver la valeur de x ? Qui a une idée ?
81. Car propose de retrancher x, ce qui donne :

$$\mathbf{2x - 4 - x = x + 3 - x}$$

82. P : Si on le fait, on garde l'égalité. Tout le monde est d'accord avec ce qu'on vient d'écrire ?
83. P : Alors, de ce côté, qu'est-ce qu'il reste si je réduis 2x moins x c'est x et de l'autre côté ?
84. Les élèves : 3.
85. Commentaire de P : x moins x ça fait toujours zéro !
86. P : Donc on s'est déjà ramené à quelque chose qu'on connaît davantage. Un x d'un côté et un nombre de l'autre
87. La fin est réalisée correctement par des propositions d'élèves qui sont rassurés (en effet ils retrouvent ce qui a été fait)

$$\mathbf{x - 4 = 3}$$
$$\mathbf{x - 4 + 4 = 3 + 4}$$
$$\mathbf{x = 7}$$

88. Un élève dit qu'il n'a pas compris. Un de ses camarades : T'as qu'à suivre ! P explique de nouveau à cet élève, en insistant sur les étapes « où tu sais résoudre » P : Tu mets un « + » ici parce que as déjà un « – ».
89. La situation semble se complexifier à mesure que les élèves revoie le travail fait (par P). Cela s'est fait sous leur regard certes, mais c'est P qui tenait la craie !
90. P : Pourquoi je fais ça ? Parce que en ajoutant 4 de chaque côté je ne change pas l'égalité, et que – 4 + 4 ça fait zéro
91. Un élève propose autre chose : On aurait pu faire directement 3 + 4 dès le départ !
92. P : Oui. Maintenant vous allez en chercher un tout seul. Allez, à vous et avec la même méthode

<u>Application</u>

$$\mathbf{5x + 6 = 4x - 3}$$

93. Tout en passant dans les rangs, P stimule les uns et les autres : Alors, tout le monde y est ? Allez, on essaye !
…/…
94. P : Quel est le terme dont on veut se débarrasser à droite ?
95. Les élèves : x
96. P : Mais il y a plus que x , il y en a combien ?
97. E : 4x
98. P : Qu'est-ce qu'il faudrait faire pour s'en débarrasser . On retranche combien pour s'en débarrasser ?
99. E : 4x.
100. P : Allez vous le faites sur votre cahier !
101. Un élève dit qu'il ne comprend pas.
102. P : On veut les x du même côté E n'a pas compris ce qui a été fait avant, notamment 2x – x.
103 . Une élève : Pourquoi là on retranche 4x et là-bas que x ?
104. P : Parce que tu veux faire disparaître un seul x du côté droit ! pour faire $x - x$ égale à 0, et ici tu dois en enlever quatre ! Donc 4x moins 4x ça fait toujours 0. Allez !
105. P : Ama on t'écoute, va au tableau

$$\mathbf{5x + 6 - 4x = 4x - 3 - 4x}$$
$$\mathbf{x + 6 = 3}$$

106. Des élèves : Non , c'est –3

$$\mathbf{x + 6 = -3}$$

107. P : Et donc que vaut x ?
108. Pendant que P discute avec le Dad, Ama en termine au tableau :

$$\mathbf{x = -3 - 6}$$
$$\mathbf{x = -9}$$

109. Les élèves l'appellent.
110. P : Ici tu as x + 6. Et nous ce qu'on cherche c'est x !… Tu fais ce que tu veux selon ce que tu as au départ !
111. P : D'un côté tu débarrasses les nombres pour les mettre à gauche. Tu débarrasses au fur et à mesure. Il y a un peu de confusion, quatre ou cinq conversations se développent simultanément.
112. P : Comment être sûr du résultat, maintenant ? Comment on sait si on s'est trompé ou pas ?

113. **<u>Vérification :</u>**

5×(–9) + 6

114. P : Calculez combien ça vaut ça !
115. E : 51 ! Non pas 51 !
116. P : 5×(–9) + 6 = –45 + 6 = –39. Et le nombre de droite, si on le calcule ?
117. P : 4×(–9) – 3 = -36 – 3 =
118. On entend –33.
119. P Ah non moins et moins on fait…4×(–9) – 3 = -36 – 3 = –39
120. Un élève revient en arrière : Madame où on le prend $x + 6 = -3$?
121. P : Tu ne veux que x à gauche. Donc ton plus x tu dois t'en débarrasser comment ?
122. E : En retranchant !
123. P : Tu retranches à gauche, tu retranches à droite! D'accord !
124. P : La vérification tout le monde l'a comprise ? Certains répondent négativement.
125. Dad : On cherche quel résultat, madame ?
126. E : On cherche la valeur de x.
127. Dad : Non, la vérification !
128. P : La question est …la valeur trouvée, est-ce qu'elle correspond bien ? On la remplace dans les deux membres de l'égalité !
129. E : Madame on sait pas si vraiment c'est égal à ça puisque au début on sait que tout ça c'est égal à 39!
130. P : Si tu prends $x = 0$, tu as combien à gauche ?
131. Cet élève : Que $x = 0$ mais si on prend par exemple $x = 1$?
132. P : Résoudre une équation, ça veut dire chercher la valeur de x pour laquelle on a l'égalité. Et la seule qu'on a trouvée, c'est –9. Et on le vérifie comme on l'a fait !
133. E : Et des fois y'en a plusieurs ?
134. P : Ça pourrait arriver. Mais il n'y en a qu'une ici ! On l'a vérifié pour en être sûr.
135. Un élève : Je voudrais poser une question. Si par exemple on fait $5x + 6$ ça fait $11x$ égal …
136. P : Non $5x + 6$, ça fait pas $11x$. On ne peut additionner que des termes semblables.
137. Mél : Mais si on a additionné $5x + 4x$.
138. P Mais si tu additionnes $4x$ de chaque côté, ça ne fait pas disparaître $4x$ à droite
139. En fait cet élève suggère de faire :

$$\mathbf{5x + 6 = 4x - 3}$$
$$\mathbf{5x + 6 - 6 = 4x - 3 - 6}$$
$$\mathbf{5x = 4x - 3 - 6}$$

Et on retombe sur la méthode.
140. On l'écrit pas ça ? demande un élève
141. Pour toute réponse P efface ce qui vient d'être écrit au tableau et note :

2. Une deuxième propriété

Propriété 2

142. P : Qui peut me dire de quoi parlait cette autre propriété ? On a vu qu'on pouvait ajouter ou soustraire des nombres sans changer l'égalité. Qu'est-ce qu'on peut faire d'autre encore ? On l'a vu lundi !
143. Dad: On peut développer.
144. P interroge un autre élève : On peut multiplier ou diviser !
145. P : On va réécrire la propriété comme tout à l'heure ! Prenez votre stylo rouge, on va écrire la propriété. Je dicte (puis P écrit)

Propriété 2
Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

***a* , *b*, *c* nombres relatifs (*c* non nul)**

Si $a = b$ alors $\begin{cases} a \times c = b \times c \\ a \div c = b \div c \end{cases}$

146. Dad : C'est un peu compliqué !
147. P : Alors, on finira les exemples lundi. Vous prenez vos cahiers d'exercices parce que je vais vous en dicter un pour la fois prochaine.

148. E : Ça va sonner !
149. P : Allez on n'a pas beaucoup de temps. Prenez votre cahier de textes.
150. E : Pourquoi vous devez nous dicter ?
151. P ne répond pas et inscrit :

<u>Pour lundi</u>

- **n° 32 p. 94**

152. E : Pourquoi vous devez nous dicter ?
153. P : Ils ne sont pas sur le livre. Ce sont d'autres équations. P invente alors en direct les équations suivantes (tout en réfléchissant), et ajoute qu'on reprend la méthode de la propriété 1 :

Résoudre :
$\mathbf{5x + 2 = 4x - 5}$
$\mathbf{-3x + 4 = -4x - 2}$
$\mathbf{8x + 5/3 = 7x + 2/5}$
$\mathbf{3x + 7 = 4x - 6}$

154. P : Tout le monde a noté ?
155. E : Non ! Non !
156. P : On prend le livre pour regarder l'exercice pour lundi.
157. Brouhaha : On le fait entier madame ?
158. P : On sort le livre. Certains ne l'ont pas. On en trouve un pour deux !
159. P : Dad ! Lis l'énoncé.
160. Dad : a) $x - 7 = -4$
161. P : Ça c'est une équation du type ?
162. Un élève : « débutant »
163. P rectifie :Vu en Cinquième, alors que les rires ont éclaté dans la classe à propos de la remarque précédente.
164. Fre est convié à lire la suite.
165. P : Tu ne lis pas les deux qui suivent !
166. Fre : b) $3x = 27$
167. P commente : Ça aussi c'est des rappels de cinquième ! D'accord ? Tout le monde doit savoir le faire par cœur.
168. P enchaîne : il y a un problème sur le c).
169. Une autre élève lit : c) $x - 2/3 = 3/4$.
170. P : Est-ce que tu peux donner une idée sur la façon de la résoudre celle-là ?
171. Mél : on fait $x = 3/4 + 2/3$.
172. P : Et comment il faudra faire pour additionner ?
173. Un élève : Tout mettre en quart ! Un autre : En sixième ?
174. P ne répond pas et dit de regarder la suivante du c) Clém ?
175. Clém : $3/4\ x = 2/3$
176. P : Comment est-ce qu'on va résoudre ? Proposition :
177. P : Comment on fait pour diviser ?
178. E : On inverse la fraction
179. E : On multiplie par son inverse ! Un élève précise : 2/3 multiplié par 4/3
180. P : Et la dernière ? Celle-ci reprend ce qu'on a fait dans l'application..
181. La sonnerie retentit. Tout le monde se lève dans la confusion et la précipitation.
<u>Fin de séance</u>

ANNEXE D3

Les équations en classe de quatrième – Corpus Pg

La classe observée est une classe de quatrième. C'est une classe hétérogène plutôt de bon niveau. C'est néanmoins une classe relativement difficile, il n'y a pas de problème d'insolence ou de violence mais un gros problème d'attention dont la plupart des professeurs se plaignent.
Il s'agit ici de la première séance de l'année portant sur les équations.

1. P : Vous prenez une nouvelle page de classeur, du côté «exercices », donc une page blanche. C'est un chapitre du numérique. Donc vous numérotez la feuille tout de suite, ça peut rendre service ; ça c'est le numéro de la page. Alors, numérique, exercice, ça va être notre chapitre combien ? Quatre ou cinq ?
2. E : Cinq.
3. P : Cinq et c'est la page «1 ». Allez : numérique, exercice, chapitre cinq, page «1 ». Ce chapitre va porter sur les équations… et justement, à ce propos, j'aimerais bien que vous me disiez ce que vous avez appris l'année dernière à propos du mot «équation », si vous avez appris quelque chose… Alors, qu'est ce qu'une équation pour vous d'abord ? Essayer de répondre à cette question : « Qu'est ce qu'une équation ? ». Si vous ne pouvez pas répondre à la question directement, est ce que vous pouvez m'en donner des exemples ?
4. E : Bien, oui.
5. P : Chut ! Pas tous à la fois. Levez le doigt. On va voir. Qui a des souvenirs ? Un, deux, trois, allez, un petit peu plus ! … Alors, Aurélie ?
6. Au : Ben, c'est pas avec des x ou …des trucs comme ça.
7. P : Alors, c'est avec x ou des trucs comme ça. Alors ?
8. E : 1 plus x égal 3 par exemple.
9. P : Par exemple, 1 plus x égal 3. Est-ce que c'est à ça que tu pensais, Aurélie ? *(P écrit au tableau : $1+x=3$*)
10. Au : Oui, mais je pensais avec x.
11. P : Tu pensais avec x.
12. E : Moi, je pensais au théorème de Thalès.
13. P : Comment ?
14. E : Je pensais au théorème de Thalès.
15. P : Et, comment ça tu pensais au théorème de Thalès ?
16. E : Il y a bien une équation à un moment ?
17. P : Oui. Tout à fait. On écrit une équation quand on écrit le théorème de Thalès. Tout à fait d'accord avec toi. Quel genre d'équation on écrit avec le théorème de Thalès ?
18. E : (plusieurs réponses inaudibles)
19. P : Oui, Lisa ? Une égalité, laquelle ? Quel genre ? A quoi elle ressemble ?
20. E : (confus)
21. P : Alors tu me dis, Lisa, par exemple, 6x sur 6 égal 1 sur 6.
22. (*P écrit au tableau* : $\frac{6x}{6}=\frac{1}{6}$)
23. P : Oui, je sais pas si on est arrivé à des choses comme ça avec le théorème de Thalès ?
24. Es : Non !
25. P : Non, à quoi on arrive avec le théorème de Thalès ?
26. E : *MN*
27. P : *MN*, par exemple, *MN* sur…
28. E : *MN* sur *BC*.
29. P : *BC*
30. E : Egal un sixième.
31. P : Egal un sixième. Et est-ce que on arrive à résoudre, à ton avis, quelque chose comme ça?
32. (*P écrit au tableau* : $\frac{MN}{BC}=\frac{1}{6}$)
33. Es : Oui .
34. Es : Non.
35. P : Non ? Généralement *BC*, on le connaît. Par exemple *BC*, ça va être égal à 14. Et après ça on fait comment pour trouver *MN* ?
36. Es : (plusieurs réponses)
37. P : Oui, on écrit..
38. E : 14 fois 1
39. P : Oui, 14 fois 1 égal…

40. E : 6 fois *MN*
41. P : 6 fois *MN*. Et ça qu'est-ce que c'est et ça aussi c'est la même chose ?
42. Es : Une équation.
43. P : C'est une équation. Si on veut l'écrire avec un x cette équation comment elle va s'écrire ? Six fois…
44. Es : x
45. P : x
46. Es :égal 14.
47. P : égal 14.
48. (*P écrit au tableau : $6x=14$*)
49. P : Donc, on m'a donné cet exemple (*P montre :$1+x=3$*), on m'a donné celui-là (*$6x=14$*).
50. E : Madame
51. P : Oui ?
52. E : En fait les équations c'est le produit en croix !
53. E' : N'importe quoi.
54. P : Avant, l'égalité écrite avant le produit en croix, avant le résultat du produit en croix, ici, c'était aussi une équation. On y reviendra là-dessus ! Ces équations, vous savez qu'est-ce qu'on en fait ? Quand on a des écritures comme ça, qu'est-ce que vous faisiez ?.. Vous m'avez donné des exemples.
55. E : Trouver la valeur de x
56. E' : x égal…
57. P : Il fallait trouver la valeur de x …. Ben, on peut mettre n'importe quoi. Non ?
58. Es : Non !
59. Es : inaudible
60. P : Alors, on veut trouver la valeur de x : j'aimerais que vous précisiez un peu.: On veut trouver la valeur de x pour que l'égalité soit vraie.
61. Es : soit juste.
62. P :… Soit conservée, pour que l'égalité soit vraie. Alors, est-ce que vous savez trouver la valeur de x dans ce cas (*$1+x=3$*) et dans celui-là (*$6x=14$*) ?
63. Es : Oui.
64. P : Oui. Dans le premier cas, Johanna ?
65. Jo : On fait 3 moins 1
66. P : et on trouve ?
67. Jo : et on a 2.
68. P : 2, et dans le deuxième cas, pour trouver x ?
69. E : 14, 14 sur 6.
70. E' : 14 divisé par 6.
71. P : Pour trouver x, on fait 14 divisé par 6. Ce sont ces équations que vous avez rencontré en cinquième, ça ?
72. Es : Oui.
73. E' : peut-être.
74. P :Est-ce que vous savez à quoi ça sert de façon générale les équations ? Ou est-ce que vous avez comme souvenir que vous avez eu des écritures de ce type, où on vous demande de trouver x ?
75. E : Oui
76. P : ou est-ce que vous savez à quoi çà peut servir?
77. E : Trouver la valeur d'une lettre.
78. P : Oui, ici effectivement à trouver la valeur de x qui convient pour que l'égalité reste vraie. Evidemment, mais de façon générale, est-ce que vous savez à quoi çà peut servir? Savoir résoudre des équations, est-ce que vous savez à quoi çà sert ?… Vous savez en résoudre quelques-unes comme ça, assez simples…
79. E : A trouver des valeurs, des nombres.
80. P : A trouver des nombres. Oui. Bien, on va essayer de découvrir à quoi ça sert. Alors, « Exercice n°1 » : vous me le collez et vous y réfléchissez. Vous avez le droit d'utiliser la calculatrice. On a le droit d'utiliser la calculatrice, oui !

> Exercice n°1 :
> Deux élèves, Alice et Bertrand ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur machine.
> Alice multiplie le nombre affiché par 2,1 puis retranche 0,3 au résultat obtenu.
> Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 1,3 puis ajoute 0,18 au résultat obtenu.
> Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.
> Quel nombre ont-ils affiché au départ ?
>
> Texte distribué aux élèves

81. P : Non, non, ce n'est pas la peine de noter, c'est pour rappeler (*Bruits de feuilles et chuchotements*…)
82. P : Tout le monde a lu l'énoncé ? Tout le monde a compris l'énoncé ? Oui ? Qu'est-ce que vous faites ?
83. (*Bruits*)
84. P : Anaïs ?
85. A : J'essaie.
86. P : Tu fais des essais sur ta calculatrice. C'est ça : alors, qu'est-ce que tu as tapé par exemple ?
87. E : Moi, Madame.
88. P : Anaïs nous dit ce qu'elle a fait.
89. A : J'ai fait deux virgule, oui deux virgule un fois zéro trois…
90. P : Il faut peut-être noter ce que vous faites au fur et à mesure sinon vous risquez de faire deux fois la même chose après. Alors, Anaïs, tu me dis : tu as tapé deux virgule un ?
91. A : fois zéro virgule trois.
92. P : fois zéro virgule trois.
93. A : Puis, après j'ai tapé un virgule trois fois zéro virgule dix huit mais ça donne pas pareil !
94. P : Un virgule trois fois
95. A : Zéro virgule dix huit
96. P : Zéro virgule dix huit et ça donne pas pareil. Mais alors, je te conseille de relire l'énoncé ! Il me semble que ce que tu dis là montre que tu n'as pas bien compris l'énoncé. Relis bien. Relis bien ce qu'a fait Alice et relis bien ce que fais Bertrand… Qui a fait autre chose avec sa calculatrice ? Non ? Tu as fais quelque chose sur ta calculatrice ? Réponds bien à la question que je pose !
97. E : Oui.
98. P : Tu as fait quelque chose sur ta calculatrice ?
99. E : Oui.
100. P : Alors je t'écoute.
101. E : J'ai fait 0,4 divisé par 2,1.
102. P : Ah ! bon .
103. E' :Pourquoi ?
104. P : Et après, tu as fais autre chose ?
105. E'' : Mais madame …
106. P : Mais pourquoi tu as tapé çà ? C'était pour te donner quel type d'indication ?
107. E : Ben, parce que moi, je croyais que c'était 2,1 fois … (Brouhaha)
108. P : Chut !Chut ! Non, je ne veux pas t'entendre. .. Relis bien l'énoncé ! Relis bien l'énoncé. Relis bien ce que tape Alice sur sa calculatrice.
109. P : (s adressant à tous) Vous êtes sûrs, là, ça, ça correspond bien àl'énoncé… Moi j'aimerais bien voir si d'autres ont tapé autre chose sur leur calculatrice. Alors Claire qu'est-ce que tuas tapé toi ?
110. C : Moi, j'ai essayé plusieurs nombres.
111. P : Alors, vous écoutez çà : ce que dit Claire s'il vous plaît ! Claire dit : « J'ai essayé plusieurs nombres ».Alors j'aimerais bien que tu me dises comment tu as fait ?
112. C : Au début, j'ai essayé 2.
113. P : 2 ; donc ça veut dire tu as tapé sur la touche 2 de la calculatrice ?
114. C : Oui. Ensuite, j'ai multiplié par 2,1.
115. P : Je vais écrire la séquence calculatrice pour que tout le monde comprenne bien. (*P écrit au tableau*)
116. C : J'ai enlevé 0,3.
117. P : Et la calculatrice, elle a dit quoi ?
118. Es : 3,9.
119. P : C'est ça ? et puis après qu'est ce que tu as fait comme autre séquence calculatrice ?
120. C : Après, j'ai remis 2. J'ai fait, j'ai multiplié par 1,3. J'ai ajouté 0,18. ..
121. P : Et on en a conclu quoi de ça ?
122. Es : Que c'est pas 2 !
123. P : Que c'était pas 2. Est-ce que tout le monde comprend bien les deux séquences calculatrices qui sont au tableau ? Est-ce que Damien peut nous réexpliquer ce que de vient de faire Claire ?
124. D : Ben … Elle a essayé de trouver l'équation, mais…
125. P : Est-ce que tu peux répéter ? J'ai pas bien entendu. C'est peut-être juste, mais j'ai pas bien entendu .
126. D : Elle a essayé de trouver l'équation.
127. P : Elle a essayé de trouver l'équation. Claire, est-ce que c'est ce que tu as essayé de faire ? Trouver une équation ?
128. C : Non.
129. P : Non. Moi je crois qu'elle a lu l'énoncé et puis qu'elle a essayé un nombre pour voir si ça marchait ou pas . Regardez ! Alice et Bertrand ont chacun une calculatrice : ils affichent le même nombre sur leur machine. Quel est le nombre affiché par Alice et Bertrand dans le cas exposé par Claire ?

130.Es : C’est 2 !
131.P : C’est 2. Elle a imaginé, elle a dit : « supposons qu’Alice et Bertrand aient affiché 2… » Alice qu’est-ce qu’elle fait avec ce nombre 2 ? Elle le…
132.Es : Multiplie…
133.P : Multiplie par…
134.Es : 2,1
135.P : 2,1 et elle retranche 0,3 et elle trouve 3,9. Bertrand lui, frappe le 2 , il le multiplie par 1,3, il ajoute 0,18 au résultat et il trouve 2,78. Or, dans l’énoncé, on nous dit « quand ils ont terminé, ils s’aperçoivent qu’ils obtiennent le même résultat ». Bien, nous les nôtres, ils n’affichent pas le même résultat, donc la conclusion que l’on peut tirer, c’est que le nombre de départ affiché sur la calculatrice n’est pas…
136.Es : 2 !
137.P : 2. Qu’est-ce qu’on peut faire pour continuer ?
138.E : On change de chiffre.
139.E’ : On part de 3,9 : c’est le résultat. On prend le plus petit résultat et après on retranche les étapes.
140.P : et oui, mais le problème, c’est que 3,9 c’est le résultat d’Alice, mais on ne sait pas si 3,9 c’est bien le résultat des deux. Partir de 3,9 et refaire les étapes à l’envers, on va trouver des nombres, on va trouver des nombres différents au départ. On aura exactement la même difficulté.
141.E : Mais madame ?
142.P : Encore : qu’est-ce qu’on pourrait faire ?
143.E : Le résultat obtenu, c’est le même ; le départ aussi c’est le même ?
144.P : Oui ! Le nombre de départ doit être le même et le résultat doit être le même. Claire ?
145.C : Après, j’ai vu que le deuxième nombre qu’on obtenait était plus petit que le premier…
146.P : Oui.
147.C : J’ai essayé deux, trois nombres au dessous de zéro et j’ai vu que le deuxième nombre était plus grand et au bout d’un moment j’ai atterri sur le nombre.
148.P : Ça veut dire que t’as fait quand même beaucoup d’essais ? Je vais répéter plus fort ce qu’a dit Claire. Elle, elle a essayé 2. Elle a dit « ça marche pas ». Elle a essayé un autre nombre à la place de 2, elle a pris par exemple 5, moi je sais pas…
149.E : Ça marche pas !
150.P : et elle a vu à ce moment là que ce nombre était encore bien plus grand que celui-là, peut-être. C’est ça ?
151.C : Bien non. J’ai pris 0,5 comme deuxième nombre.
152.P : Ah ! D’accord. Bien, on va l’écrire. Elle a fait l’essai avec 0,5. Faites-le également. Tapez-le rapidement.. . Et là, on trouve combien avec 0,5 ? 1,05 ?

Pendant ce temps P. écrit au tableau :

0,5	x	2,1	–	0,3	=	0,75
0,5	x	1,3	+	0,18	=	0,83

153.Es : 0,75.
154.P : J’ai pas entendu.
155.Es : 0,75 !
156.P : 0,75 pour Alice et pour… pour Bertrand ? Alors, il multiplie par 1,3 et il ajoute 0,18.
157.Es : 0,83.
158.P : 0,83. Alors explique nous, Claire, ce que tu as dit ici. Tu avais remarqué que 3,9 était plus grand que 2,78. C’est ça ?
159.C : Oui.
160.P : Ici, tu as remarqué que 0,75 cette fois est plus petit que 0,83.
161.C : Oui, donc (*inaudible*)
162.P : Voilà. Tu fais, tu as essayé de te rapprocher le plus possible et qu’est-ce que tu as essayé après ?
163.C : J’ai essayé 1 et ça allait pas. Après j’ai essayé 0,6 et c’était ça !
164.P : Donc en quatre essais ?
165.C : Oui.
166.P : En quatre essais. Claire a essayé 1 puis elle a essayé 0,6 et elle s’est rendu compte que pour 0,6 çà marche.
167.Es : On va voir (*d’autres réactions inaudibles*).
168.P : Bien. Essayez 0,6 pour voir si ça marche. Essayez-le !Tapez-le sur vos calculatrices. On va taper 1. On va taper 0,6.
169.E : Ça marche pas…
170.P : Ça marche pas ?
171.Es : Si ça marche !

172.P : Combien ça donne ?
173.Es : 0,96 !

Pendant ce temps P. écrit au tableau :

0,6	x	2,1	–	0,3	=	0,96
0,6	x	1,3	+	0,18	=	0,9-

174.P : 0,96. Dans les deux cas ?
175.Es : Oui.
176.E : Moi aussi.
177.P : Bon. Finalement, au bout de quelques minutes….Claire est la seule a avoir trouvé la réponse ?
178.E : Oui, elle a fait plusieurs essais…
179.E' : Elle a eu de la chance !
180.P : et elle a eu de la chance. Non ! Non ; non , parce qu'elle a bien guidé sa chance…
181.Es : Si ! Si !
182.P : Non. Non. Non, elle a pas fait des essais au hasard.
183. (*protestations d'élèves*).
184.P : On y reviendra. Sur ce travail-là, on aurait pu faire beaucoup d'essais ! Est-ce que vous êtes d'accord ?
185.Es : Oui.
186.P : On aurait pu en faire un plein tableau sans trouver la bonne réponse !
187.E : 0,1 ; 0,2.
188.P : Donc, c'est quand même pas une méthode extraordinaire ! Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? C'est pas une méthode terrible ! On va donc essayer maintenant, plutôt que de faire des essais, on va essayer ce que certains d'entre vous ont déjà commencé à faire sur leur cahier. On va essayer de traduire le problème en utilisant effectivement une lettre pour remplacer les nombres, ou le nombre – le ou les, je ne sais pas – nombres qui ne sont pas connus. Allez, allez-y dans ce sens. Essayez de traduire le problème, en utilisant des lettres pour remplacer les nombres qui ne sont pas connus. Le ou les nombres, comme vous voulez !

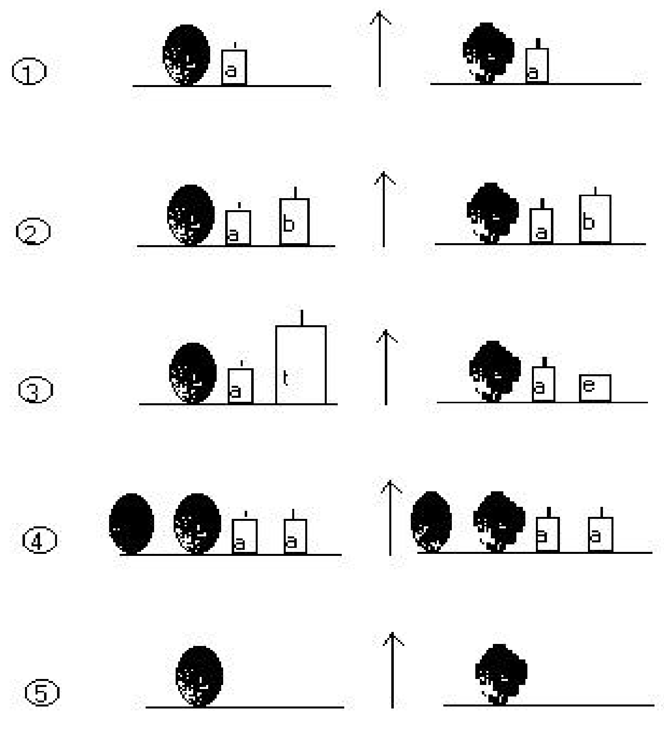
Les élèves travaillent à leurs places et P. circule dans les rangs.

189.P : J'ai déjà vu des choses intéressantes écrites chez beaucoup.
190.P : (à un élève) Oui, mais après, comment tu vas finir ?
191.P : (à un autre élève) Oui.
192.P : Alors, Nans ! tu peux me dire ce que tu as écris, toi ?
193.N : *x* fois 2,1 moins 0,3 égal *y*.
194.P : et puis même, tu as mis autre chose devant ?
195.N : J'ai mis le nom.
196.P : Tu as mis Alice. Voilà ce que je dis, pour y voir clair ! Alors, Nans me dis quelque chose. Moi, je sais pas si vous avez compris ? Moi, je comprends pas vraiment tout à fait tout ce qu'il me dit ! Alors, le *x* qu'est-ce que c'est le *x* ?
197.E : C'est le même nombre.
198.P : Ah ! Alors *x* donc, toi, tu as dit « je vais désigner par *x* », enfin tu ne l'as pas écrit mais j'imagine que dans ta tête, tu as dit « *x*, c'est.. »
199.E : Le nombre que…
200.P : Le nombre inconnu affiché…
201.E : au départ..
202.P : au départ : *x*, nombre inconnu, pour nous, bien sûr ! Affiché au départ. On est bien d'accord ? Et tu as écrit « Alice » et tu as fait *x* multiplié par 2,1, je crois…
203.E : Moins 0,3.
204.P : Moins 0,3 égal *y*. Est-ce que ça vous paraît juste pour les autres ?
205.Es : (*Murmures*).
*206.*P : Oui :le nombre affiché multiplié 2,1. Je lui retranche 0,3 et ça me donne un nouveau nombre affiché sur la calculatrice. Finalement, ça ressemble exactement, tout à fait à ce qu'on a écrit précédemment avec les séquences calculatrice. C'est pas très différent. (*P. a écrit au tableau : « x nombre inconnu affiché au départ » et en dessous « Alice : x x 2,1 – 0,3 = y »)*
*207.*P : Bien ! En dessous, à la ligne, au-dessous à la ligne qu'est-ce que tu as écris ?
*208.*N : Bertrand.
*209.*P : Bertrand.
210.N : *x* multiplié par 1,3 plus…
211.P : Pourquoi tu as pris *x* ?

212.Es : Parce que c'est le même.
213.P : Parce que ils ont affiché le même nombre !
214.N : plus 0,18 égal *y*. *(P écrit au tableau : « Bertrand : x x 1,3 + 0,18 = y »)*
215.P : et pourquoi tu as pris *y* ?
216.Es : On sait que c'est le même nombre.
*217.*P : *y* est l'affichage de la calculatrice et c'est le même pour les deux ! *(P. au tableau relie les deux y par un trait)*
218.P : Est-ce que certains d'entre vous on écrit autre chose ? Philippe, oui ?
219.Ph : *x* fois 2,1
220.P : Alors dans ton écriture « *x* fois 2,1 » *x* représente toujours la même chose ?
221.Ph : Oui.
222.P : C'est bien. Bon, je t'écoute.
223.Ph : *x* fois 2,1 moins 0,3 est égal à *x* fois 1,3 plus 0,18 égal à *y*. (*P écrit au tableau : x x 2,1 – 0,3 = x x 1,3 + 0,18 = y*).
224.P : C'est ce que tu as écrit ?
225.Es : Mais c'est la même chose !
226.P : C'est la même chose mais ça se présente pas tout à fait de la même manière quand même, mais c'est la même chose ! Alors, moi je vais supprimer ça (*P au tableau barre « ~~= y~~ »*). Est-ce que on a le droit d'écrire ça ?
227.E : Oui, parce que on a le même résultat.
228.P : Est-ce qu'on a le droit d'écrire cette égalité là ?
229.Es : Oui !
230.P : Oui, pourquoi ?
231.Es : Parce que…
232.P : Parce que on sait que quand on fait cette séquence calculatrice ou celle là on a le même résultat, le même affichage de la calculatrice, donc finalement la séquence de calcul tapée par Alice et la séquence de calcul tapée par Bertrand donnent le même résultat. Il y a donc égalité ! Oui ? ! Et cette écriture là *(P. entoure au tableau « $\boxed{x.2{,}1 – 0{,}3=x.1{,}3 + 0{,}18}$ »)* qu'est-ce que c'est ?
233.Es : Une équation !
234.P : Une équation !
235.Es : Ah ?
236.P : Mais c'est une équation un peu plus un tout petit peu plus compliquée que celles que vous m'avez montrées au début de l'heure. Mais c'est aussi une équation ! Une équation que vous ne savez peut-être pas très bien résoudre encore !
237.E : Ben oui. On va apprendre !
238.P : Et là, on va apprendre. Exactement ! Alors, résumons nous un tout petit peu : une équation finalement, si on essayait d'en donner une définition ?
239.E : C'est une égalité.
240.P : C'est une égalité : pas tout à fait !Est-ce que c'est la même chose que çà (*P. écrit 2 + 6 = 8 au tableau*).
241.Es : Non.
242.P : Voilà ! Donc précise un petit peu : une équation c'est une égalité dans laquelle…
243.E : Facteurs
244.P : …il y a des facteurs . On pourra dire plus simplement des nombres…
245.Es : Inconnus…
246.P : Inconnus. Un nombre inconnu ici ! Il n'y a pas plusieurs nombres inconnus, il y en a un seul ! Donc une égalité dans laquelle il y a un nombre inconnu. Et résoudre l'équation, qu'est-ce que c'est ?
247.E : Trouver la valeur de …
248.P : Trouver la valeur du nombre inconnu pour que l'égalité soit vraie, soit juste. Oui ? Dans certains cas, dans des équations assez simples on sait faire cela, celles que vous donniez en début d'heure. Dans des équations plus compliquées, ben, va nous falloir apprendre. Et maintenant, si je vous repose la question « A quoi ça sert de savoir résoudre des équations ? »
249.Es : (*Murmures)*
250.E : à compléter une égalité.
251.P : Attends, tu me le diras tout à l'heure. Je voudrais que vous répondiez d'abord à la première question que j'ai posée : A quoi ça sert de savoir résoudre une équation ?
252.E : À compléter une égalité.
253.P : À compléter une égalité ?
254.E : Enfin, pas compléter, mais trouver …
255.P : On est parti de quoi là ? ici ?
256.Es : Un problème
257.P : Un problème. Donc, si je sais résoudre cette équation, est-ce que je sais résoudre le problème?
258.Es : Oui.

259.P : Est-ce que j'aurai la réponse au problème posé ?
260.Es : Oui.
261.P : Et comme, je vais apprendre à résoudre ça de manière systématique, je vais pouvoir donner la réponse au problème de façon, j'allais dire, beaucoup moins au hasard que ce que l'on a fait tout à l'heure en faisant des essais. Est-ce que vous comprenez ça ? Donc, à la question maintenant, « A quoi çà sert de savoir résoudre des équations ? »… Ben, si on insiste au collège et si on vous apprend à résoudre des équations, c'est pour pouvoir par la suite résoudre des problèmes ! Parce que c'est ça qui est intéressant, c'est résoudre des problèmes, et pour résoudre les problèmes il faut savoir résoudre les équations. Est-ce que tout le monde a noté ?.. Ah ! Oui, excuse moi. Il y a Benjamin tout à l'heure qui a dit quelque chose puis je l'ai interrompu.
262.B : Les équations ont pas toujours des solutions.
263.P : C'est vrai : Benjamin dit : « les équations ont pas toujours des solutions ». C'est vrai, on en rencontrera à l'occasion. De même qu'elles peuvent ne pas avoir de solutions, elles peuvent aussi avoir plusieurs solutions. Alors, est-ce que tout le monde a bien noté l'équation correspondant au problème ?
264.Es : Oui.
265.P : Oui. Et bien maintenant, on y reviendra à cette équation, un petit peu plus tard pour résoudre le problème. On va apprendre à résoudre des équations. Exercice numéro 2. ..
266.E : On le laisse comme ça ?
267.P : On le laisse comme ça ! Le problème, il est pas fini mais on ne l'oubliera pas. On y reviendra. Quand on saura résoudre l'équation, on y reviendra. C'est la première équation qu'on résoudra après. Exercice 2.

P distribue le texte de l'exercice 2.



La balance n°1 est en équilibre. Pour les balances 2-3-4-5 indique ce que l'on a fait et si elle sont bien dessinées.

268.E : On le laisse comme ça !
269.P : On le laisse comme ça. Le problème n'est pas fini mais on ne l'oubliera pas. On y reviendra quand on saura résoudre l'équation. On y reviendra. C'est la première équation qu'on résoudra après l'exercice2.
270.E : On laisse de la place ?

271.P : Non. Non, on y reviendra plus loin. C'est pas grave. On n'a pas besoin de laisser de place. On mettra un petit rappel.
272. (*Bruits dans la salle*)
273.P : Oh ! Tu peux lui donner un nom. Alors ça, c'est un petit exercice, j'allais dire de bon sens, tout bête..
274. (*Discussions des élèves en aparté*)
275.P : J'espère que tout le monde comprend bien. Ce dont on est sûr, ce que j'affirme… Ça y est. Tout le monde a regardé ou pas encore ?
276.Es : Oui ! Non !
277.P : Dépêchez-vous de finir vos collages.
278.E : Madame, la « deux » elle est bien équilibrée ?
279.P : Oui. Mais non. La balance n°1 est bien dessinée : celle-là on en est sûr. Les balances 2,3,4,5, elles sont dessinées en équilibre mais je ne suis pas sûre qu'elles soient toutes bien dessinées. Alors, à vous de dire celles qui sont bien dessinées et pourquoi, celles qui ne le sont pas et pourquoi.
280. (*Discussions entre élèves*).
281.P : Oui, mais on fait des phrases !
282.E : On redessine ?
283.P : Oui. C'est peut-être la meilleure solution pour rendre compte de la situation…. Faites une phrase !. …La balance n°1 est bien dessinée…. (*moments inaudibles*).
284.E : A l'équerre et tout ?
285.P : N'exagérons pas ! Ce sont des croquis.
286.E' : Elle penche un peu, celle-là, c'est normal ? C'est vrai !
287.P : Oui, mais c'est le tirage qui est pas bon !
288.E' : Ah ! Bon.
289.P :N'exagérez pas, non plus.
290.E' : Non, mais enfin, ça aurait pu.
291.P : Benjamin ! Réponds donc aux questions mathématiques !
292.E : Y a un *a*, *a*, *a* et là il y a un *t* et là un *e*. Qui me dit que le *t* doit être égal au *e* ?
293.P (s'adressant à un autre élève) : Ah ! Oui, tu voudrais que ce soit symétrique ?
294.E : Il est gros. Oui. Mais ça peut être… Ouais ! Bien, on va mettre « Non ».
295.P : C'est fini ?
296.Es : Oui. Non.
297.P : Vous m'avez fait des phrases ?
298.E : Non, moi, j'ai juste mis « oui, non, oui, non… ». (*Des discussions en aparté entre élèves*).
299.P : Penses aux phrases que tu vas associer à tes écritures là…Qu'est ce qu'on a fait pour passer de la première balance a la deuxième ? ou à la troisième ? ou à la quatrième ?
300.E : Il faut se reporter au premier dessin ?
301.P : Oui. Bien, oui ! Bien sûr !
302.(*reprises de discussions en aparté*).
303.Bon. Alors ! Qui me raconte qu'est ce qu'il a écrit pour la balance n°2. La balance n°2, à votre avis, elle est bien dessinée ? C'est à dire, est ce que l'aiguille doit être en équilibre ?
304.Es : Oui !
305.P : Oui. Pourquoi ? Benjamin ?
306.B : Parce que dans le, dans les deux… dans les deux… Comment dire ? Dans les deux cas, on retrouve la masse *a* et *b* et le gros rond. Enfin, les masses elles sont identiques !
307.P : Oui. Essaie de comparer la deuxième balance à la première. Qu'est ce qu'on a fait par rapport à la première?
308.B : Bien, bien. …(Murmures)
309.P : Chut. Benjamin ?
310.B : On a rajouté la masse *b* à chaque…
311.P : sur chaque ?
312.B : Je ne sais pas dire.
313.P : plateaux.
314.B : sur chaque plateau !
315.P : La première balance était en équilibre, la deuxième balance reste en équilibre. Entrez ! (une surveillante entre et donne une information).
316.(Brouhaha).
317.P : Notez rapidement et on revient à nos balances. Lundi 22 mars… Laissez les sur le coin de la table pour les ramenez au bureau. … Allez, vous reprenez les masses et les balances ! Reprenez vite la fiche et essayons de faire la phrase pour la balance n°2 !
318.E : Mais, si on met « oui » parce qu'il y a une boule..

319.P : Oui, bien sûr ! Mais je veux qu'on compare à la balance précédente, à la balance n°1! La balance n°2 est en équilibre car on a ajouté sur chaque plateau de la balance 1, on va dire la même masse. Je voudrais que tout le monde ait noté cette phrase : « la balance n°2 est en équilibre car on a ajouté sur chaque plateau de la balance 1 la même masse ». (*P note au tableau cette phrase*).
320.P : et comme la balance n°1 était en équilibre, si j'ajoute de chaque côté la même masse, elle va rester en équilibre. Est-ce que vous êtes d'accord avec ça ? J'ai une balance en équilibre – je me fiche de ce qu'il y a dessus – je sais qu'elle est en équilibre cette balance. Il peut y avoir n'importe quoi dessus, si je rajoute exactement la même masse de chaque côté, cette balance, elle va rester en équilibre. D'accord ? Allez, faites la suite dans ce sens là !
321.(*Brouhahas*)
322.P : Oui, bien sûr ! Mais, je voulais que l'on compare par rapport à la balance n°1, je voulais qu'on compare… On compare à chaque fois à la balance n°1.
323.E : Madame ?
324.P : Ma consigne est sans doute pas très explicite… Alors, la balance n°3. Juliette ! Qu'est-ce que tu vas écrire, toi ? Elle est bien dessinée, pas bien dessinée ? Elle est en équilibre, elle n'est pas en équilibre ?
325.J : La balance n° 3 n'est pas en équilibre car on a rajouté sur un plateau une grosse masse et sur l'autre plateau une petite.
326.P : Voilà ! En tout cas, le dessin montre assez nettement que les masses qui sont ajoutées sur chaque plateau sont différentes. Alors, donc la phrase, on la reprend : « la balance n°3 n'est pas en équilibre car on a ajouté sur chaque plateau… »
327.E : des masses différentes…
328.P : « Deux masses différentes. » (*P écrit la phrase au tableau*).
329.P : Voilà. On va pas raconter une grosse et une petite mais on voit nettement qu'elles sont différentes. Oui, Lisa ?
330.L : (inaudible, brouhaha)
331.P : Elles sont identiques les balles, les masses hachurées sont les mêmes. Donc si on voulait que ce soit en équilibre, il faudrait ça, oui !Tu as raison. Allez, la balance n°4, maintenant. Est-ce qu'elle est en équilibre ?
332.Es : Oui.
333.P : Alors, Johanna ?
334.J : Alors, il y a exactement les mêmes masses, donc cette balance est en équilibre.
335.P : Oui. Mais par rapport à la balance n°1 ?
336.J : On a doublé les masses qui s'y trouvaient.
337.E : Oui, on a doublé…
338.P : On a doublé effectivement les masses contenues sur chaque plateau de la balance n°1.Moi, c'est cette phrase que je veux ! « La balance n° 4 est en équilibre car on a doublé les masses contenues sur chacun des plateaux de la balance n°1. (*P écrit la phrase au tableau, les élèves recopient*).
339.P : Nauss, tu notes ! Tu l'avais mis sous cette forme là ?
340.N : Non, j'avais fait « compté sur chacun des plateaux ».
341.P : Et la dernière phrase que nous allons écrire ? Marine, qu'est-ce que ça va être ? La balance n°5 ?
342.M : Heu… Sur chaque plateau…
343.P : D'abord, elle est en équilibre ou pas ?
344.M : Oui, car sur chaque plateau, on a enlevé la même masse « petit *a* ».
345.P : Exactement, car sur chaque plateau de la balance n°1, on a enlevé la même masse. En réalité, si on a fait ce petit exercice sur les balances, c'est parce que les balances ici représentent des situations d'égalités et ce que l'on vient de raconter avec les plateaux d'une balance, on va pouvoir vérifier que c'est encore vrai pour les deux membres d'une égalité. Alors, je vous attends, parce que je voudrais que tout le monde soit attentif….(*Silence*) Est-ce que tout le monde est prêt ?
346.Es : Oui.
347.P : Il reste une minute ou deux minutes, (*Bruits*) alors, vous vous taisez !Vous écoutez bien !

P écrit au tableau : 3+7=2x5.

348.P : Qu'est-ce que je viens d'écrire ?
349.E : Une égalité.
350.P : Une égalité. Est-ce qu'elle est vraie ?
351.Es : Oui, non.

La sonnerie retentit !

352.P : On est d'accord pour dire oui, tous ?
353.Es : Oui, non.

354.P : Bon, alors, imaginez maintenant, voilà un plateau de balance et voilà l'autre plateau (P montre chaque membre de l'égalité). Elle est en équilibre : ici, l'égalité est vraie ! Imaginons que j'ajoute ceci de chaque côté. (*P avec une craie rouge ajoute 9 à chaque membre de l'égalité au tableau : 9+3+7=9+2x5*.)
355.E : Ah. Oui, d'accord !
356.P : Est-ce que l'égalité va rester vraie ?
357.Es : Oui.
358.P : Dites, elle va rester vraie à quelle condition ?
359.Es : (Brouhaha)
360.P : Si je fais,… Isa me dit si je fais ça de chaque côté…

P écrit au tableau :2x(3+7)=2x(2x5)

361.P : l'égalité reste vraie.
362.Es : Oui.
363.P Elle va rester vraie encore dans quelles conditions ? La dernière correspondant à la situation de la balance ?
364.Es : inaudibles
365.P : Si on en enlève la même masse par exemple ici, est ce qu'elle va rester vraie ?

P écrit au tableau : (3+7)–4=(2x5)–4

366.Es : Oui.
367.P : Et bien, ces règles-là, on les écrira dès cet après-midi ou jeudi…

ANNEXE D2

H. Schaeffer et J. Lebaile. *Mathématiques classe de 5^e^* . Paris : Delagrave, (1954). pp. 151&152.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

PREMIÈRE MÉTHODE : FAIRE UN DESSIN

178. Exemple. ***Résoudre l'équation*** $2x + 3 = 7x - 9$.

Nous représenterons graphiquement $2x + 3$ et $7x - 9$ par des segments de droite comme nous l'avons fait souvent jusqu'ici (les segments qui représentent $2x + 3$ et $7x - 9$ sont l'un au-dessus de l'autre sur la figure). ***Et on traduit l'égalité de $2x + 3$ et $7x - 9$ en s'arrangeant de façon que les deux traits aient la même longueur.***

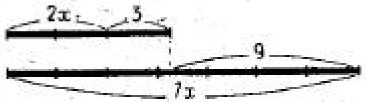


Fig. 56.

Bien entendu il n'est pas possible de faire un dessin rigoureusement exact car on ne connaît pas la valeur de x; il suffit de bien montrer par le graphique que $2x + 3$ est égal à $7x - 9$.

Le dessin montre alors que $7x - 2x$, donc $5x$, est égal à $9 + 3$ c'est-à-dire 12.

$$5x = 12 \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Vérification : si $x = 2{,}4$ $\quad 2x + 3 = 4{,}8 + 3 = 7{,}8$
et $\quad 7x - 9 = 16{,}8 - 9 = 7{,}8$.

179. Autre exemple : ***Résoudre l'équation*** $3 - x = 7x - 9$.

Ce premier dessin (fig. 57), tout à fait correct, ne nous renseigne guère.

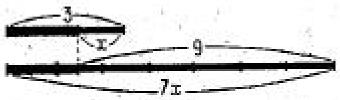


Fig. 57.

Mais il suffit de retourner bout pour bout ce qui représente $3 - x$ pour voir très clairement que $7x + x$, donc $8x$, est égal à $9 + 3$ donc 12 (fig. 58)

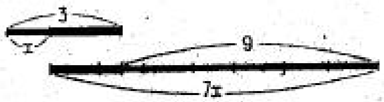


Fig. 58.

$$8x = 12$$

$$\text{d'où} \quad x = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

Vérification : si $x = 1{,}5$ $\quad 3 - x = 3 - 1{,}5 = 1{,}5$
et $\quad 7x - 9 = 10{,}5 - 9 = 1{,}5$.

Remarque. — La plupart des équations simples peuvent se résoudre par des dessins. Mais dès que l'équation se complique la méthode devient délicate à employer (dans l'exemple précédent vous avez déjà vu apparaître une difficulté).

C'est pourquoi il est nécessaire d'étudier d'autres méthodes de résolution plus efficaces.

DEUXIÈME MÉTHODE : TRANSFORMER L'ÉQUATION

I. *Transformation par addition ou soustraction.*

Exemple étudié : $6x + 4 = 2x + 18$.

180. Remarque permettant d'imaginer une nouvelle méthode de résolution. — Nous cherchons une valeur de x telle que $6x + 4$ soit égal à $2x + 18$.

Or, dire que $\qquad 6x + 4 = 2x + 18$

c'est dire :

a) que $6x + 5 = 2x + 19$ (en ajoutant 1 à $6x + 4$ il faut aussi ajouter 1 à $2x + 18$ pour conserver l'égalité);

b) ou que $\qquad 6x + 7 = 2x + 21$.

De même, dire que $6x + 4 = 2x + 18$ revient à dire :

a) que $6x + 3 = 2x + 17$ (en retranchant 1 à $6x + 4$ il faut aussi retrancher 1 à $2x + 18$ pour conserver l'égalité;

b) ou que $\qquad 6x = 2x + 14$.

Règle : On peut remplacer une équation par l'équation obtenue en ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres de l'équation donnée.

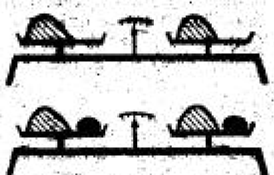


Fig. 59.

Pour retenir cette règle, on peut imaginer (fig. 59) que le premier membre de l'équation représente un poids. Le deuxième membre de l'équation représente alors un poids égal. Si on ajoute (ou enlève) un même poids dans chacun des deux plateaux, la balance reste en équilibre.